Zusammenfassung Mathematik Biologie 1./2. Semester ETH Zürich

Anic Ostertag

18. Februar 2009

Zusammenfassung

Das vorliegende Dokument ist eine Zusammenfassung des Stoffes der Mathematik Vorlesungen des ersten und zweiten Semesters Biologie an der ETH Zürich. Als Basis diente *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 1-3* von Lothar Papula.

Satz: TeX Live LaTeX2e

Graphiken: XFig, Openoffice.org Draw

Graphen: Gnuplot

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

1 Funktionen

1.1 Polynomfunktionen (Ganzrationale Funktionen)

$$y = mx + b, \quad m = \tan\alpha$$
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

(siehe Abbildung 1)

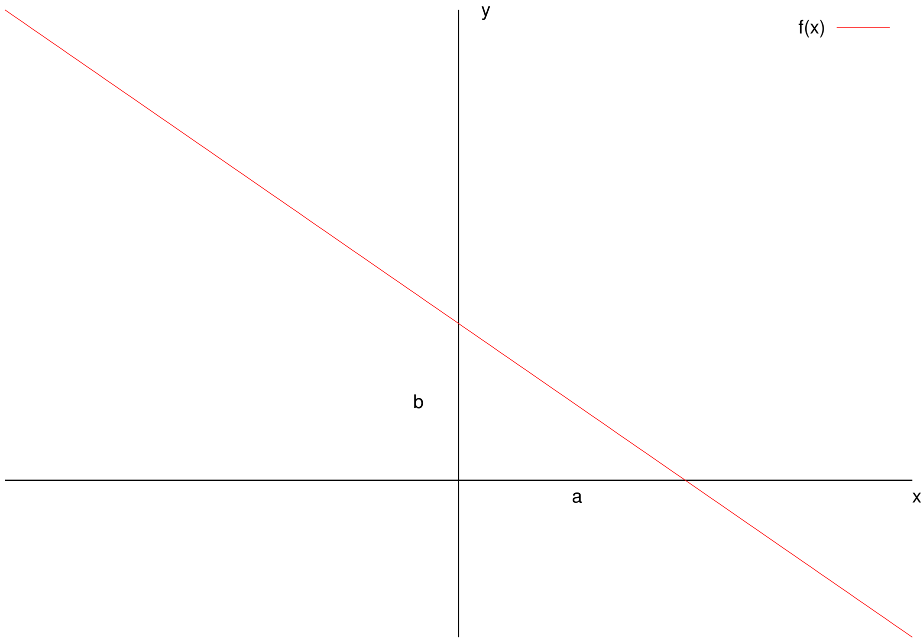


Abbildung 1: Graph einer trivialen Polynomfunktion

Produktform einer Parabel

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$
$$x_1, x_2 = \text{Scheitelpunkt mit x-Achse (reelle Nullstellen)}$$

Abspaltung eines Linearfaktors

$$f(x) = \overbrace{(x - x_1)}^{\text{Nullstelle}} \cdot f_1(x)$$

Nullstellen Ein Polynom n-ten Grades hat höchstens n Nullstellen.

Zerlegung in Linearfaktoren

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ &= a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) \end{aligned}$$

Nullstellen-Berechnung mittels Hornerschema

	a_3	a_2	a_1	a_0
x_0		a_3x_0	$(a_2+a_3x_0)x_0$	$(a_1+a_2x_0+a_3x_0^2)x_0$
	$\underbrace{a_3}_{b_2} \nearrow$	$\underbrace{a_2+a_3x_0}_{b_1} \nearrow$	$\underbrace{a_1+a_2x_0+a_3x_0^2}_{b_0} \nearrow$	$\underbrace{a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+a_3x_0^3}_{f(x_0)} \cdots$

Beispiel: $y = 3x^3 + 18x^2 + 9x - 30$; Nullstelle $x_1 = -5$

	3	18	9	30
$x_1 = -5$		-15	-15	30
	3	3	-6	0

$\rightsquigarrow$ $f_1(x) = 3x^2 + 3x - 6$
$NS_{1,2} = 1, -2$
$y = 3(x+5)(x-1)(x+2)$

1.2 Gebrochenrationale Funktionen

$$y = \frac{g(x)}{h(x)}$$

Nullstelle x_0 $\quad g(x_0) = 0 \wedge h(x_0) \neq 0$

Polstelle x_0 $\quad h(x_0) = 0 \wedge g(x_0) \neq 0$

Bestimmung von Nullstelle und Pol:

1. Zerlegung von g und h in Linearfaktoren (kürzen)
2. Linearfaktoren Zähler = Nullstelle; Linearfaktoren Nenner = Pole

Asymptote

1. unechtgebrochenrationale Funktion $\rightsquigarrow$ Polynomdivision $f(x) = \overbrace{p(x)}^{\text{ganzrational}} + \underbrace{r(x)}_{\text{echt gebrochenrational}}$
2. für $x \to \pm\infty \begin{cases} r(x) \to 0 \\ p(x) = \text{Asymptote im Unendlichen} \end{cases}$

1.3 Potenz- und Wurzelfunktionen

Potenzfunktionen

$$y = f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*); \quad f(-x) \begin{cases} f(x) & n = \text{gerade} \\ -f(x) & n = \text{ungerade} \end{cases}$$

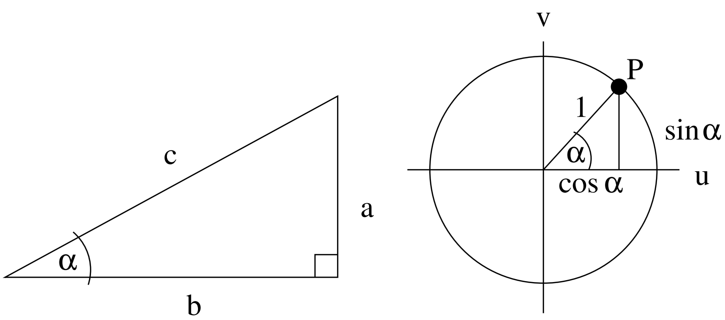
$\mathbb{D} \in \mathbb{R}$

$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$

Wurzelfunktion

$$y = f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} \quad (x > 0, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*)$$
$$y = x^a = \mathrm{e}^{\ln x^a} = \mathrm{e}^{a \ln x}$$

1.4 Trigonometrische Funktionen



(a) Rechtwinkliges Dreieck (b) Einheitskreis

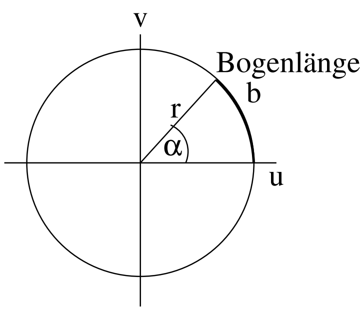
Abbildung 2: Rechtwinkliges Dreieck und Einheitskreis

a : Gegenkathete, b : Ankathete } bezüglich α
c : Hypothenuse

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$
$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Bogenlänge

Bogenmass x



$$x = \tfrac{b}{r}$$
$$\tfrac{x}{\alpha} = \tfrac{2\pi}{360^\circ} = \tfrac{\pi}{180^\circ}$$

Umrechnung

$$x = \tfrac{\pi}{180^\circ}\alpha$$
$$\alpha = \tfrac{180^\circ}{\pi}x$$

Abbildung 3: Bogenlänge

1.4.1 Sinus und Cosinus

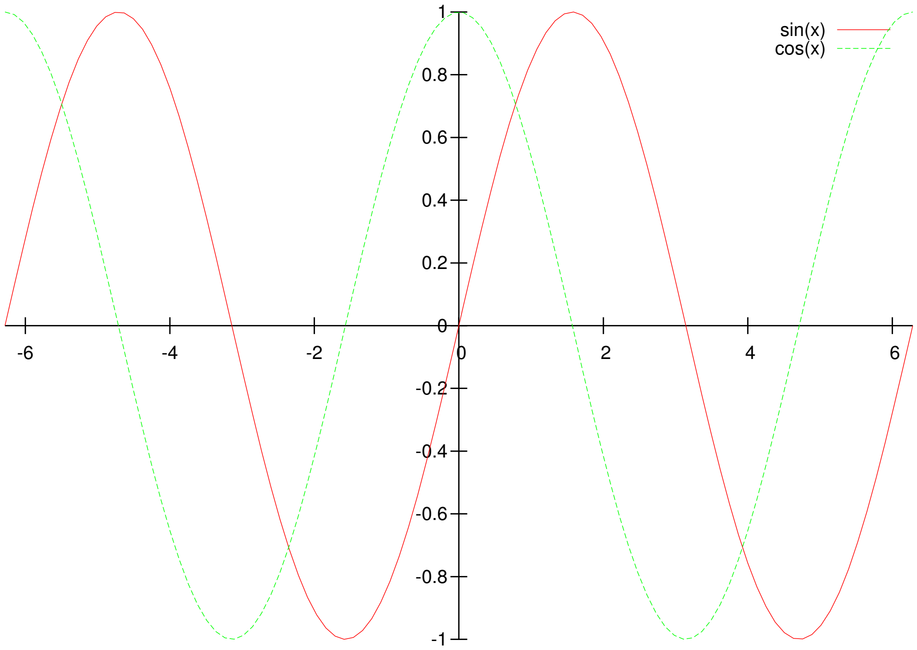


Abbildung 4: Graph von Sinus und Cosinus

$k \in \mathbb{Z}$

	$y = \sin x$	$y = \cos x$
$\mathbb{D}$	$-\infty < x < \infty$ ($\mathbb{R}$)	$-\infty < x < \infty$ ($\mathbb{R}$)
$\mathbb{W}$	$-1 \leq y \leq 1$ ($[-1, 1]$)	$-1 \leq y \leq 1$ ($[-1, 1]$)
Periode	2π	2π
Symmetrie	ungerade	gerade
Nullstelle	$x_k = k\pi$	$x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$
rel. Maxima	$x_k = \frac{\pi}{2} + k2\pi$	$x_k = k2\pi$
rel. Minima	$x_k = \frac{3}{2}\pi + k2\pi$	$x_k = \pi + k2\pi$

Tabelle 1: Eigenschaften von Sinus und Cosinus

1.4.2 Tangens und Cotangens

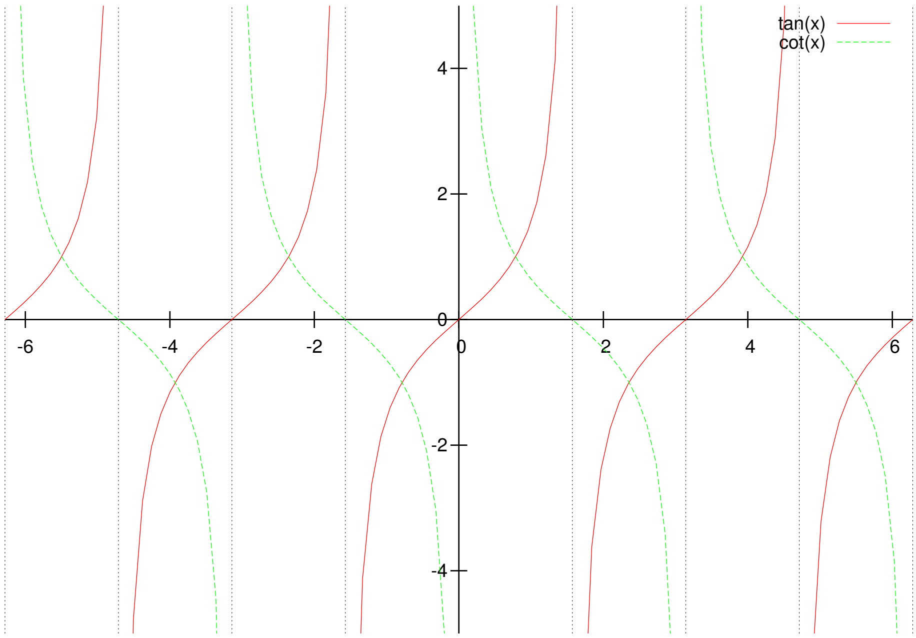


Abbildung 5: Graph von Tangens und Cotangens

$k \in \mathbb{Z}$

	$y = \tan x$	$y = \cot x$
$\mathbb{D}$	$\mathbb{R} \setminus \{x \mid x = (2k+1)\frac{\pi}{2}\}$	$\mathbb{R} \setminus \{x \mid x = k\pi\}$
$\mathbb{W}$	$-\infty < y < \infty$ ($\mathbb{R}$)	$-\infty < y < \infty$ ($\mathbb{R}$)
Periode	π	π
Symmetrie	ungerade	ungerade
Nullstellen	$x_k = k\pi$	$x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$
Pole	$x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$	$x_k = k\pi$
Senkrechte Asymptoten	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$	$x = k\pi$

Tabelle 2: Eigenschaften von Tangens und Cotangens

1.4.3 Beziehungen zwischen Trigonometrischenfunktionen

$$\begin{array}{l|l|l} \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) & \tan x \cdot \cot x = 1 & \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \\ \sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) & \cot x = \frac{1}{\tan x} & \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x \end{array}$$

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{Pythagoras}$$

Additionstheoreme

$$
\begin{aligned}
\sin(x_1 \pm x_2) &= \sin x_1 \cdot \cos x_2 \pm \cos x_1 \cdot \sin x_2 \\
\cos(x_1 \pm x_2) &= \cos x_1 \cdot \cos x_2 \pm \sin x_1 \cdot \sin x_2 \\
\tan(x_1 \pm x_2) &= \frac{\tan x_1 \pm \tan x_2}{1 \pm \tan x_1 \cdot \tan x_2} \\
\sin(2x) &= 2 \sin x \cdot \cos x \\
\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\
\sin^2 x &= \frac{1}{2}[1 - \cos(2x)] \\
\cos^2 x &= \frac{1}{2}[1 + \cos(2x)] \\
\sin\alpha + \sin\beta &= 2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2 \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2 \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\sin\alpha \sin\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)] \\
\cos\alpha \cos\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)] \\
\sin\alpha \cos\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)] \\
\cos x &= \sqrt{1 - \sin^2 x} \\
\cos^2 x &= 1 - sin^2 x
\end{aligned}
$$

1.5 Arcusfunktionen

Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen.

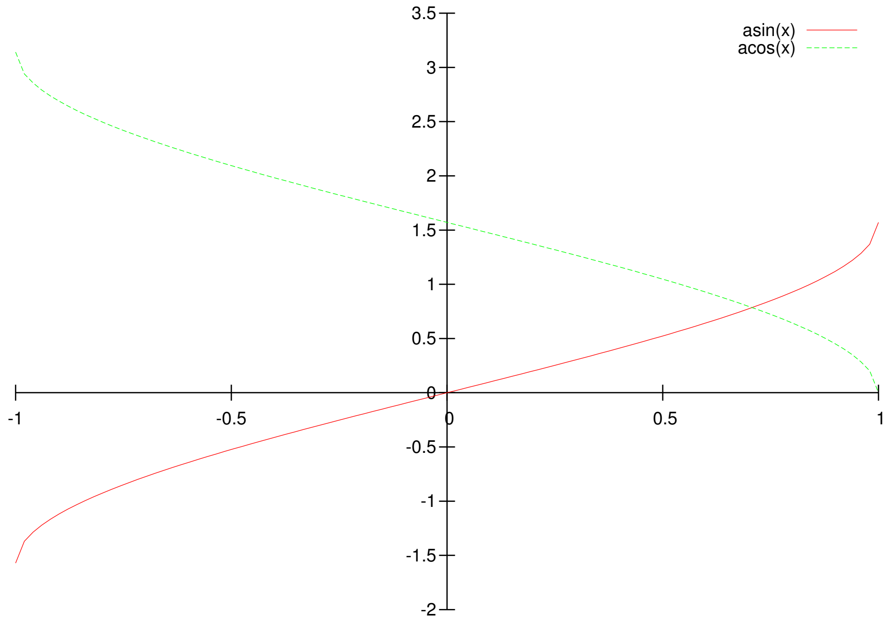


Abbildung 6: Graph von Arcsin und Arccos Funktionen

	$y = \sin x$	$y = \arcsin x$
$\mathbb{D}$	$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$	$-1 \leq x \leq 1$
$\mathbb{W}$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
Nullstellen	$x_0 = 0$	$x_0 = 0$
Symmetrie	ungerade	ungerade
$x =$	$\arcsin(\sin x),\ \lvert x\rvert \leq \frac{\pi}{2}$	$\sin(\arcsin x),\ \lvert x\rvert \leq 1$
	$y = \cos x$	$y = \arccos x$
$\mathbb{D}$	$0 \leq x \leq \pi$	$-1 \leq x \leq 1$
$\mathbb{W}$	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq x \leq \pi$
Nullstellen	$x_0 = \frac{\pi}{2}$	$x_0 = 1$
$x =$	$\arccos(\cos x),\ x \in [0, \pi]$	$\cos(\arccos x),\ x \in [-1, 1]$

Tabelle 3: Eigenschaften von Arcsin und Arccos

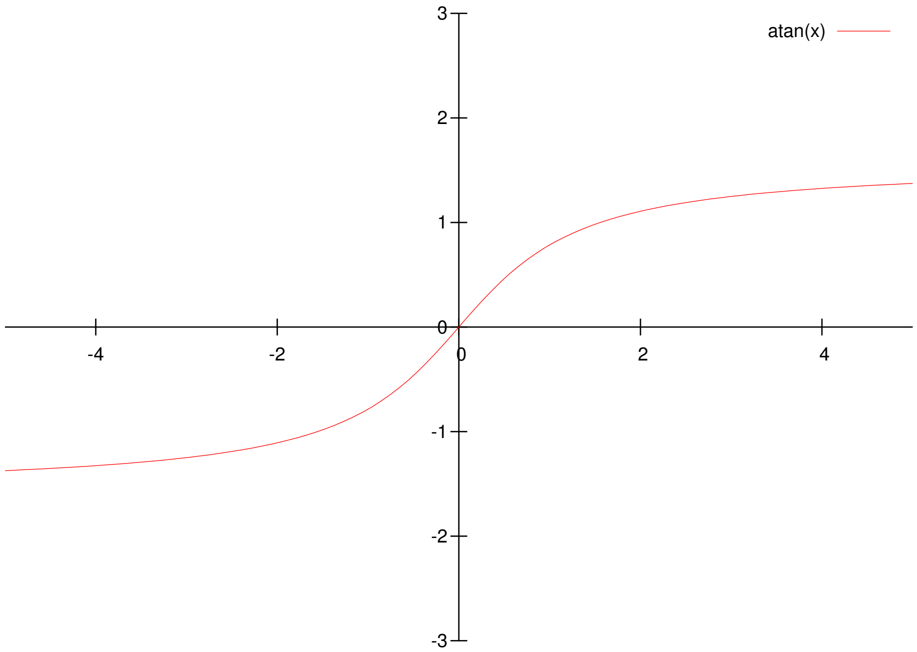


Abbildung 7: Graph von Arctan

	$y = \tan x$	$y = \arctan x$
$\mathbb{D}$	$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$	$-\infty < x < \infty$
$\mathbb{W}$	$-\infty < x < \infty$	$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
Nullstellen	$x_0 = 0$	$x_0 = 0$
Symmetrie	ungerade	ungerade
Asymptoten	$x = \pm\frac{\pi}{2}$	$y = \pm\frac{\pi}{2}$
$x =$	$\arctan(\tan x),\ \lvert x\rvert < \frac{\pi}{2}$	$\tan(\arctan x),\ x \in \mathbb{R}$
	$y = \cot x$	$y = \operatorname{arccot} x$
$\mathbb{D}$	$0 < x < \pi$	$-\infty < x < \infty$
$\mathbb{W}$	$-\infty < y < \infty$	$0 < y < \pi$
Nullstellen	$x_0 = \frac{\pi}{2}$	keine
Asymptoten	$x = 0,\ x = \pi$	$y = 0,\ y = \pi$
$x =$	$\operatorname{arccot}(\cot x),\ 0 < x < \pi$	$\cot(\operatorname{arccot} x),\ x \in \mathbb{R}$

Tabelle 4: Eigenschaften von Arctan und Arccot

1.6 Exponentialfunktionen

Rechenregeln für Potenzen

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= a^{m+n} & aa^n &= a^{n+1} \\ \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} & a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \\ (a^m)^n &= a^{m \cdot n} & a^0 &= 1 \\ a^n b^n &= (ab)^n & a^1 &= a \\ \frac{a^n}{b^n} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n & 0^n &= 0, \; n > 0 \\ 1^n &= 1 \end{aligned}$$

Eigenschaften von Exponentialfunktionen

$$y = a^x, \; a > 0 \wedge a \neq 1$$

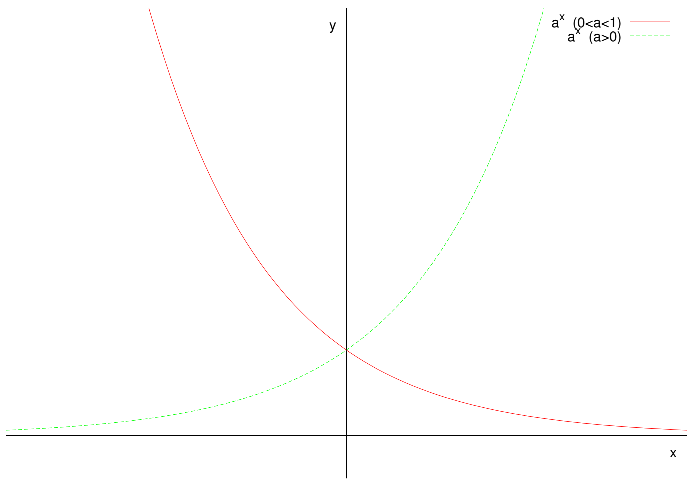


Abbildung 8: Graph einer Exponentialfunktion

	$y = a^x, \; 0 < a < 1$	$y = a^x, \; a > 1$
$\mathbb{D}$	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < x < \infty$
$\mathbb{W}$	$0 < y < \infty$	$0 < y < \infty$
Asymptote	$y = 0 \; (x \to \infty)$	$y = 0 \; (x \to -\infty)$
Nullstellen	keine	keine
Extrema	keine	keine

Tabelle 5: Eigenschaften von Exponentialfunktionen

$$y = \mathrm{e}^x;\ y = \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^x = \mathrm{e}^{-x}$$

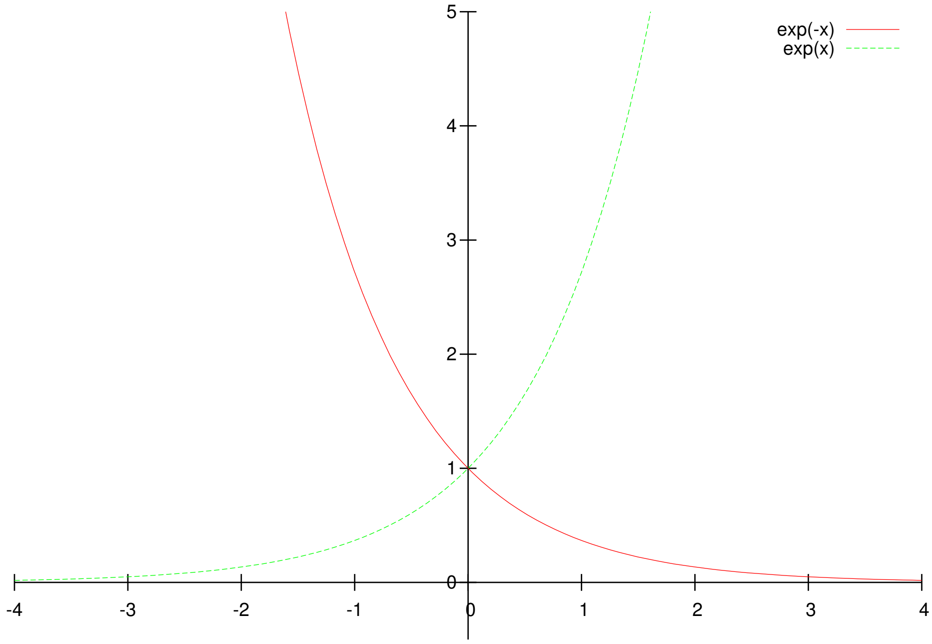


Abbildung 9: Graph der e-Funktion

1.7 Logarithmusfunktionen

$$y = a^x$$
$$x = f^{-1}(y) = \log_a y \ (a > 0 \wedge a \neq 1)$$

Grundbegriffe

$$r = a^x \ (r > 0, a > 0 \wedge a \neq 1)$$
$$x = log_a r$$

Rechenregeln

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$$
$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$$
$$\log_a\left(u^n\right) = n \cdot \log_a u$$

$$\log_a\left(\frac{1}{v}\right) = -\log_a v$$

Basiswechselsatz:

$$\log_b r = \frac{\log_a r}{\log_a b} = \left(\frac{1}{\log_a b}\right)\cdot\log_a r$$
$$\ln r = \frac{\lg r}{\lg e} = \frac{\lg r}{0.4343} = 2.3026\cdot\lg r$$
$$\lg r = \frac{\ln r}{\ln 10} = \frac{\ln r}{2.3026} = 0.4343\cdot\ln r$$

Spezielle

$$\log_e r \equiv \ln r$$
$$\log_{10} r \equiv \lg r$$

1.7.1 Eigenschaften der Logarithmusfunktionen

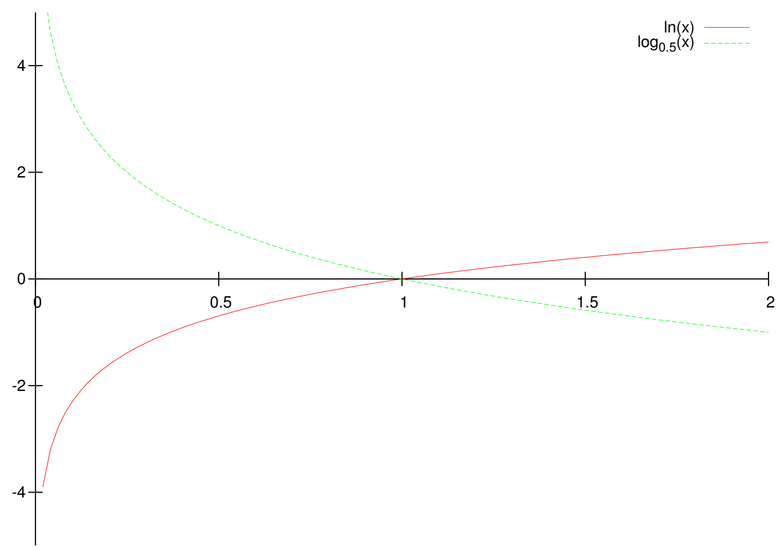


Abbildung 10: Graph von Logarithmusfunktionen

Eigenschaften siehe Tabellen 6 und 7 auf der nächsten Seite.

1.8 Hyperbel- und Areafunktionen

Hyperbelfunktionen

$$y = \sinh x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)$$

	$y = a^x$	$y = \log_a x$
$\mathbb{D}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$
$\mathbb{W}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$
Nullstellen	keine	$x_0 = 1$
Asymptoten	$y = 0$	$x = 0$
$x =$	$\log_a a^x,\ x \in \mathbb{R}$	$a^{\log_a x},\ x \in \mathbb{R}^+$

Tabelle 6: Eigenschaften der Logarithmusfunktion

	$y = \mathrm{e}^x$	$y = \ln x$
$\mathbb{D}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$
$\mathbb{W}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$
$x =$	$\ln \exp x,\ x \in \mathbb{R}$	$\exp \ln x,\ x \in \mathbb{R}^+$

Tabelle 7: Eigenschaften der natürlichen Logarithmusfunktion

$$y = \cosh x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)$$
$$y = \tanh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$
$$y = \coth x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$$

Areafunktionen

$$y = \operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$y = \operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \qquad x \geq 1$$
$$y = \operatorname{artanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \qquad |x| < 1$$
$$y = \operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \qquad |x| > 1$$

Wichtige Beziehungen zwischen hyperbolischen Funktionen

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$
$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{1}{\tanh x}$$

Additionstheoreme

$$\sinh(x_1 \pm x_2) = \sinh x_1 \cdot \cosh x_2 \pm \cosh x_1 \cdot \sinh x_2$$
$$\cosh(x_1 \pm x_2) = \cosh x_1 \cdot \cosh x_2 \pm \sinh x_1 \cdot \sinh x_2$$
$$\tanh(x_1 \pm x_2) = \frac{\tanh x_1 \pm \tanh x_2}{1 \pm \tanh x_1 \cdot \tanh x_2}$$

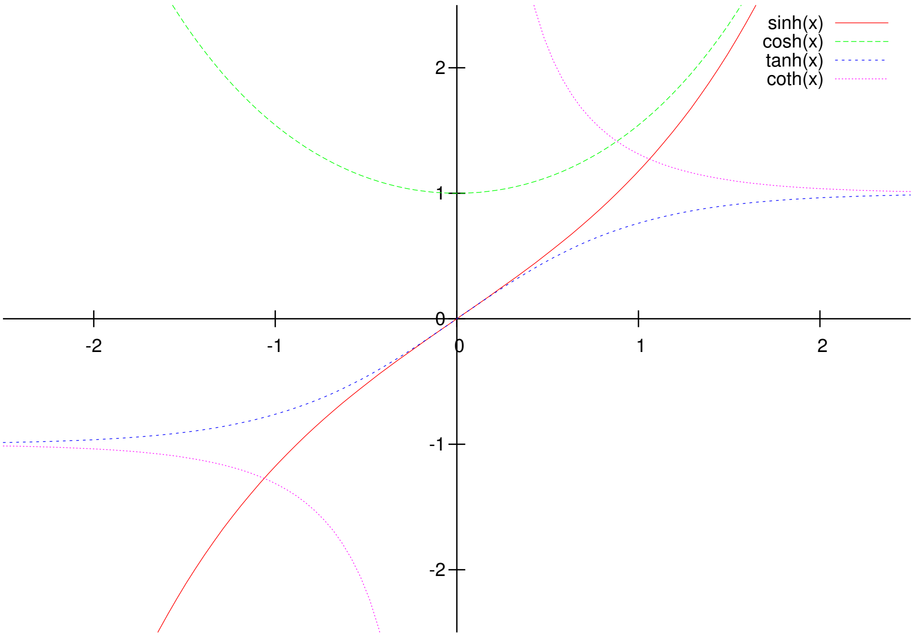


Abbildung 11: Graph der Hyperbelfunktionen

$$\begin{aligned}
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 \\
\sinh(2x) &= 2\sinh x \cdot \cosh x \\
\cosh(2x) &= \sinh^2 x + \cosh^2 x \\
\mathrm{e}^x &= \cosh x + \sinh x \\
\mathrm{e}^{-x} &= \cosh x - \sinh x
\end{aligned}$$

	$y = \sinh x$	$y = \cosh x$
$\mathbb{D}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{W}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Symmetrie	ungerade	gerade
Nullstellen	$x_0 = 0$	keine
Extrema	keine	$x_0 = 0$ (Min.)
Asymptoten	$y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x$ $(x \to \infty)$	$y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x$ $(x \to \infty)$
	$y = \tanh x$	$y = \coth x$
$\mathbb{D}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\mathbb{W}$	$]-1, 1[$	$\{x \| \|x\| > 1\}$
Nullstellen	$x_0 = 0$	keine
Symmetrie	ungerade	ungerade
Pole	keine	$x_0 = 0$
Asymptoten	$y = 1$ $(x \to \infty)$ $y = -1$ $(x \to -\infty)$	$x = 0$ (Polgerade) $y = 1$ $(x \to \infty)$ $y = -1$ $(x \to -\infty)$

Tabelle 8: Eigenschaften von Hyperbelfunktionen

	$y = \operatorname{arsinh} x$	$y = \operatorname{arcosh} x$
$\mathbb{D}$	$\mathbb{R}$	$[1, \infty[$
$\mathbb{W}$	$\mathbb{R}$	$[0, \infty[$
Nullstelle	$x_0 = 0$	$x_0 = 1$
Symmetrie	ungerade	keine
	$y = \operatorname{artanh} x$	$y = \operatorname{arcoth} x$
$\mathbb{D}$	$]-1, 1[$	$\{x \| \|x\| > 1\}$
$\mathbb{W}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
Nullstellen	$x_0 = 0$	keine
Symmetrie	ungerade	ungerade
Pole	$x_{1,2} = \pm 1$	$x_{1,2} = \pm 1$
Asymptoten	$x = \pm 1$ (Polgeraden)	$x = \pm 1$ Polgeraden $y = 0$ $(x \to \pm\infty)$

Tabelle 9: Eigenschaften von Areafunktionen

2 Differentialrechnung

2.1 Differenzierbarkeit

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \tan \alpha = m$$

(Linkseitiger Grenzwert = rechtseitiger Grenzwert $\Rightarrow \exists$ Grenzwert)

2.2 L'Hospital

Für unbestimmte Ausdrücke der Form $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^{\infty}, 0^0, \infty^0$. Beispiel:

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \to \pm\infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \to \pm\infty}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Muss zum Teil mehrmals angewendet werden.

2.3 Ableitungen elementarer Funktionen

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$c = \text{const}$	0	e^x	e^x
$x^n, n \in \mathbb{R}$	$n \cdot x^{n-1}$(Pot.regel)	a^x	$(\ln a) \cdot a^x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\log_a x$	$\frac{1}{(\ln a)x}$
$\cos x$	$-\sin x$	e^{cx}	ce^{cx}
$-\sin x$	$-\cos x$	e^{-x}	$-\frac{e^x}{e^{2x}}$
$-\cos x$	$\sin x$	$\sin(2x)$	$(\sin u)' = (\cos u) \cdot 2 = 2\cos(2x)$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tan^2 x$	$\sin^2 x - \cos^2 x$	$4 \sin x \cos x$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$		
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$
$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arcoth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Tabelle 10: Ableitungen elementarer Funktionen

2.4 Ableitungsregeln

Faktorregel

$$y = c \cdot f(x) \rightsquigarrow y' = c \cdot f'(x) \quad (c\text{: const.})$$

Summenregel

$$y = f(x) + g(x) + h(x) + \cdots \rightsquigarrow y' = f'(x) + g'(x) + h'(x) + \cdots$$

Produktregel

$$\begin{aligned} y = u(x) \cdot v(x) &\rightsquigarrow y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ y = u(x) \cdot v(x) \cdot w(x) &\rightsquigarrow y' = u'(x)v(x)w(x) + u(x)v'(x)w(x) \\ &\qquad\quad + u(x)v(x)w'(x) \end{aligned}$$

Quotientenregel

$$y = \frac{u(x)}{v(x)} \rightsquigarrow y' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

Kettenregel

$$y = v(u(x)) = f(x) \rightsquigarrow y' = v'(u) \cdot u'(x) = f'(x)$$

$u(x)$: innere Funktion. $v(u)$: äussere Funktion.

Log. Ableitung

$$y = f(x) = [u(x)]^{v(x)},\ u(x) > 0 \rightsquigarrow y' \begin{cases} \text{1. beide Seiten logarithmieren} \\ \text{2. Kettenregel anwenden} \end{cases}$$

Potenz- und Kettenregel

$$y = [f(x)]^n \rightsquigarrow y' = n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$$

Umkehrfunktion ableiten

$$y = f(x),\ x = g(y) = f^{-1}(x) \rightsquigarrow g'(y) = \frac{1}{f'(x)},\ f'(x) \neq 0$$

1. in $f'(x)$ x durch $g(y)$ ersetzen
2. x und y miteinander vertauschen

2.5 Tangente und Normale

$$P(x_0, y_0) \quad y = f(x) \rightsquigarrow T = \frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x_0),\ N = \frac{y - y_0}{x - x_0} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

2.6 Linearisierung einer Funktion

In der Umgebung des Kurvenpunkts $P(x_0, y_0)$ kann die nicht-lineare Funktion $y = f(x)$ näherungsweise durch die lineare Funktion (Kurventangente) $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ oder $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x$ ersetzt werden.

2.7 Geometrische Deutung der 1. Ableitung

$y' = f'(x) \rightsquigarrow$ Steigung der Kurventangente $\rightsquigarrow$ Monotonieverhalten:

$f'(x_0) > 0$ streng monoton wachsend

$f'(x_0) < 0$ streng monoton fallend

2.8 Geometrische Deutung der 2. Ableitung

$y'' = f''(x) = (f'(x))' \rightsquigarrow$ Monotonieverhalten von $f'(x) \rightsquigarrow$ Krümmungsverhalten der Funktionskurve:

$f''(x_0) > 0$ Linkskrümmung

$f''(x_0) < 0$ Rechtskrümmung

3 Kurvendiskussion

- $\mathbb{D}$ (Definitionsbereich), $\mathbb{W}$ (Wertebereich)
- Definitionslücken: Nenner = 0
- Symmetrie:
  $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ gerade (y-Achse=Spiegelachse)
  $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ ungerade (punktsymmetrisch)
- Nullstellen: Zähler = 0, Nenner $\neq 0 \rightsquigarrow$
  Hornerschema: Beispiel $y = 2x^4 + 12x^3 - 44x + 30$. x_0 raten $\rightsquigarrow$

  $$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 12 & 0 & -44 & 30 \\ \hline x_1 = 1 & & 2 & 14 & 14 & -30 \\ \hline & 2 & 14 & 14 & -30 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \Rightarrow 2x^3 + 14x^2 + 14x + 30$$

  bis $x^2 + \cdots$
  Quadratische Gleichungen

  $$D = b^2 - 4ac$$

$$\begin{aligned} D > 0 : x_1 &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \\ x_2 &= \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \\ D = 0 : x_1 = x_2 &= \frac{-b}{2a} \\ D < 0 : x_1 &= \frac{-b + \mathbb{i}\sqrt{-D}}{2a}, \\ &\frac{-b - \mathbb{i}\sqrt{-D}}{2a} \end{aligned}$$

- Pole, senkrechte Asymptoten (Polgeraden): Nenner $= 0$, Zähler $\neq 0$
- Ableitungen: in der Regel $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ (siehe Abschnitt 2 auf Seite 19)
- relative Extrema:

  relatives Minimum

  $$f(x_0) < f(x) \quad \text{(Tiefpunkt)}$$

  relatives Maximum

  $$f(x_0) > f(x) \quad \text{(Hochpunkt)}\ x_0 \neq x$$

  $y = f(x)$ **besitzt an der Stelle** x_0 **ein relatives Extrema, wenn**

  $$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) \neq 0 \begin{cases} f''(x_0) > 0 \Rightarrow & \text{rel. Min.} \\ f''(x_0) < 0 \Rightarrow & \text{rel. Max.} \end{cases}$$

- Wendepunkte: $y = f(x_0)$ besitzt an der Stelle x_0 Wendepunkt, wenn

  $$f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0$$

  Sattel- oder Terassenpunkt, wenn

  $$f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0$$

- Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$, Asymptoten:
  $m < n$

  $$\lim_{x\to\infty} f(x) = y_{as} = 0$$

  $m = n$

  $$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)/x^m}{h(x)/x^n} = y_{as}$$

  $m > n$

  Polynomdivision

- Zeichnung

4 Integralrechnungen

$$f(x) \overset{\text{Integration}}{\longrightarrow} F(x) + C \quad \text{mit } F'(x) = f(x)$$

$F(x)$ Stammfunktion zu $f(x)$ wenn $F'(x) = f(x)$ gilt.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A$$

vorhanden, wenn $f(x)$ in $a \leq x \leq b$ stetig ist. Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung

$$I(x) = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C_1$$

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C$$

4.1 Grund- oder Stammintegrale

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \ (n \neq 1)$$

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \arcsin x + C_1 \\ -\arccos x + C_2 \end{cases}$$

$$\int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x + C$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,\mathrm{d}x = \tanh + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arsinh} x + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arcosh} |x| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C \ (|x| > 1)$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \operatorname{artanh} x + C_1 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C_1, & |x| < 1 \\ \operatorname{arcoth} x + C_2 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + C_2, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \arctan x + C_1 \\ -\operatorname{arccot} x + C_2 \end{cases}$$

$$\int \cosh x \,\mathrm{d}x = \sinh x + C$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2 x} \,\mathrm{d}x = -\coth x + C$$

$$\int \frac{1}{ax+b} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} \ln |ax+b|$$

$$\int \mathrm{e}^{cx} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{c} \mathrm{e}^{cx}$$

$$\int a^{cx} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{c \ln a} a^{cx}$$

4.2 Integrale berechnen mit Stammfunktion

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) (= F(x)|_a^b)$$

4.3 Integrationsregeln

Faktorregel

$$\int_a^b C \cdot f(x) \,\mathrm{d}x = C \cdot \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x \quad (C: \text{ Konstante})$$

Summenregel

$$\int_a^b [f_1(x) + \cdots + f_n(x)] \,\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x) \,\mathrm{d}x + \cdots + \int_a^b f_n(x) \,\mathrm{d}x$$

$$\int [f(x) + g(x)] \,\mathrm{d}x = \int f(x) \,\mathrm{d}x + \int g(x) \,\mathrm{d}x$$

Endliche Summen dürfen gliedweise integriert werden.

Vertauschregel

$$\int_b^a f(x) \,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x$$

Vertauschen der Integrationsgrenzen bringt einen Vorzeichenwechsel mit sich.

a = b

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Zerlegung des Integrationsintervalls in Teilintervalle

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Monotonie

$$f(x) \geq g(x) \text{ in } [a,b] \quad \Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \ (a \leq c \leq b)$$

$$f(x) \geq 0 \text{ in } [a,b] \quad \Rightarrow \int_a^b (fx)\,\mathrm{d}x \geq 0$$

4.4 Integrationsmethoden

4.4.1 Integration durch Substitution

1.
$$u = g(x),\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x),\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$$

   oder

$$x = h(u),\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = h'(u),\ \mathrm{d}x = h'(u)\,\mathrm{d}u$$

   Integrationsgrenzen durch u ausdrücken.

2.
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \varphi(u)\,\mathrm{d}u$$

3.
$$\int \varphi(u)\,\mathrm{d}u = \Phi(u),\ (\Phi'(u) = \varphi(u))$$

4.
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \Phi(u) = \Phi(g(x)) = F(x),\ (F'(x) = f(x))$$

4.4.2 Integralsubstitutionen

Typ	Substition	Beispiel
$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x$	$u = ax+b$ $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{a}$	—
$\int f(x)\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x$	$u = f(x)$ $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{f'(x)}$	$\int \sin x \cdot \cos x\,\mathrm{d}x$ $(u = \sin x)$ $\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ $(u = \ln x)$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$	$u = f(x)$ $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{f'(x)}$	$\int \frac{2x-3}{x^2-3x+1}\,\mathrm{d}x$ $\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+5}\,\mathrm{d}x$
$\int f(x;\sqrt{a^2-x^2})\,\mathrm{d}x$	$x = a\cdot\sin u$ $\mathrm{d}x = a\cdot\cos u\,\mathrm{d}u$ $\sqrt{a^2-x^2} = a\cdot\cos u$	$\int \sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ $(x = r\cdot\sin u)$ $\int x\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ $(x = r\cdot\sin u)$ $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$ $(x = 2\cdot\sin u)$
$\int f(x;\sqrt{x^2+a^2})\,\mathrm{d}x$	$x = a\cdot\sinh u$ $\mathrm{d}x = a\cdot\cosh u\,\mathrm{d}u$ $\sqrt{x^2+a^2} = a\cdot\cosh u$	$\int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ $(x = \sinh)$ $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4}}$ $(x = 2\cdot\sinh u)$
$\int f(x;\sqrt{x^2-a^2})\,\mathrm{d}x$	$x = a\cdot\cosh u$ $\mathrm{d}x = a\cdot\sinh u\,\mathrm{d}u$ $\sqrt{x^2-a^2} = a\cdot\sinh u$	$\int \sqrt{x^2-9}\,\mathrm{d}x$ $(x = 3\cdot\cosh u)$ $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-25}}\,\mathrm{d}x$ $(x = 5\cdot\cosh u)$

Tabelle 11: Integralsubstitutionen

4.4.3 Partielle Integration

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x$$

oder

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)\cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x$$

Manchmal mehrmals anwenden oder mit anderen Methoden kombinieren (z.B. Substitution). Voraussetzungen:

- von $v'(x)$ ohne Probleme $v(x)$ bestimmbar.
- $\int u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x$ ist elementar lösbar. Idealfall: Stammintegral

4.4.4 Partialbruchzerlegung

Unechtgebrochene rationale Funktion zuerst durch Polynomdivision in ganzrationalen Teil $p(x)$ und echtgebrochenen Teil $r(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = f(x)$ zerlegen.

1. Nullstellen bestimmen
2. x_1: Einfache Nullstelle $\rightsquigarrow \frac{A}{x-x_1}$
   x_1: Doppelte Nullstelle $\rightsquigarrow \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2}$
   $\vdots$
   x_1: r-fache Nullstelle $\rightsquigarrow \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x-x_1)^r}$
3. $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \sum$ aller Partialbrüche ($= \sum$ aller Nullstellen)
4. gemeinsamer Nenner finden $\rightsquigarrow$ 1 Bruch. Lineares Gleichungssystem lösen.
5. Integration der einzelnen Partialbrüche

4.5 Uneigentliche Integrale

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

Berechnung:

1. $I(\lambda) = \int_a^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to\infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty} \int_a^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x$

Wenn ein Grenzwert $\in \mathbb{R}$vorhanden ist, ist das uneigentliche Integral konvergent, sonst divergent.

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Berechnung

1. $\int_\epsilon^b f(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\lim_{\epsilon\to-\infty} \int_\epsilon^b f(x)\,\mathrm{d}x$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

Berechnung

1. $\int_\epsilon^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\lim_{\substack{\lambda\to\infty\\ \epsilon\to-\infty}} \int_\epsilon^\lambda f(x)\,\mathrm{d}x$

4.6 Anwendung der Integralrechnung

4.6.1 Flächeninhalt zwischen Kurve und x-Achse

$$A = \int_a^b |f(x)\,\mathrm{d}x = \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

Eventuell mit Hilfe der Nullstellen Teilflächen bilden.

4.6.2 Flächeninhalt zwischen zwei Kurven

$$A = \int_a^b (y_o - y_u)\,\mathrm{d}x = \int_a^b [f_o(x) - f_u(x)]\,\mathrm{d}x$$

$y_o = f_o(x)$ Gleichung der oberen Randkurve. $y_u = f_u(x)$ Gleichung der unteren Randkurve. Voraussetzung: $f_o(x) \geq f_u(x)$ im Intervall $a \leq x \leq b$. Wenn die Kurven sich schneiden: $A = A_1 + A_2$.

4.6.3 Rotationsvolumne

$y = f(x),\ a \leq x \leq b$, Rotation um die x-Achse $\rightsquigarrow$

$$V_x = \pi \int_a^b y^2\,\mathrm{d}x = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

$x = g(y),\ c \leq y \leq d$, Rotation um die y-Achse $\rightsquigarrow$

$$V_y = \pi \int_c^d x^2\,\mathrm{d}y = \pi \int_c^d g^2(y)\,\mathrm{d}y$$

Falls $f(x)$ existiert und $g(y)$ gebraucht wird, nach x auflösen $\rightsquigarrow x = g(y)$.

4.6.4 Bogenlänge einer ebenen Kurve

$$\begin{aligned} &y = f(x),\ a \leq x \leq b \Rightarrow \\ &s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

5 Potenzreihenentwicklung

Unendliche Reihe

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

Harmonische Reihe

$$\sum_{n}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

(divergent)

Geometrische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$$

(konvergent)

5.1 Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist *konvergent* wenn $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ einen Grenzwert s besitzt:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = s$$

sonst ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergent.*

5.2 Konvergenzkriterien

Quotientenkriterium

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1 && \Rightarrow \sum a_n \text{ konvergent}\\
&\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1 && \Rightarrow \sum a_n \text{ divergent}\\
&\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q = 1 && \Rightarrow \text{anderes Kriterium suchen}
\end{aligned}$$

Kriterium von Leibniz

1. a_k alternierend: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots \quad (a_n > 0)$
2. $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > a_{n+1} > \ldots \Rightarrow \sum a_n$ konvergent
3. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum a_n$ konvergent

Wurzelkriterium

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q, \; 0 < q < 1 \;\Rightarrow \sum a_n \text{ konvergent}$$

5.3 Potenzreihe

1. $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$
2. $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$
   x_0: Entwicklungspunkt, wenn $x_0 = 0 \rightarrow 1$

Konvergenzbereich Menge aller x-Werte, für die die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert. Geometrisch: Bereich innerhalb des Konvergenzkreises.

Konvergenzverhalten Zu jeder Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gibt es eine positive Zahl r (=Konvergenzradius) mit folgenden Eigenschaften:

1. Potenzreihe konvergiert im Intervall $|x| < r$
2. Potenzreihe divergiert für $|x| > r$
3. keine allgemeingültigen Aussagen an den Randpunkten $|x| = r$. Weitere Untersuchungen nötig.

Konvergenzradius berechnen $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Voraussetzung: $a_n \neq 0$ und Grenzwert vorhanden.

Eigenschaften

1. konvergiert innerhalb ihres Konvergenzbereiches absolut
2. darf innerhalb ihres Konvergenzbereiches gliedweise differenziert und integriert werden. Die neuen Potenzreihen besitzen denselben Konvergenzradius wie die ursprüngliche Potenzreihe
3. Zwei Potenzreihen dürfen im gemeinsamen Konvergenzbereich der Reihen gliedweise addiert, subtrahiert und multipliziert werden. Die neuen Potenzreihen konvergieren dann mindestens im gemeinsamen Konvergenzbereich der beiden Ausgangsreihen.

5.3.1 Geometrische Deutung des Konvergenzbereiches und -radius

Der *Konvergenzbereich* der Potenzreihe entspricht dem Inneren des Konvergenzkreises (siehe Abbildung 12 auf der nächsten Seite) liegenden *Bereich* der Zahlengerade. Die Potenzreihe *konvergiert* überall im Intervall $|x| < r$. Ausserhalb *divergiert* die Reihe ($|x| > r$). Das Konvergenzverhalten an den Randpunkten muss näher untersucht werden.

5.4 Taylor-Reihen

Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe (MacLaurin'sche Reihe)

$$f(x) = f(x) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n,\ x_0 = 0$$

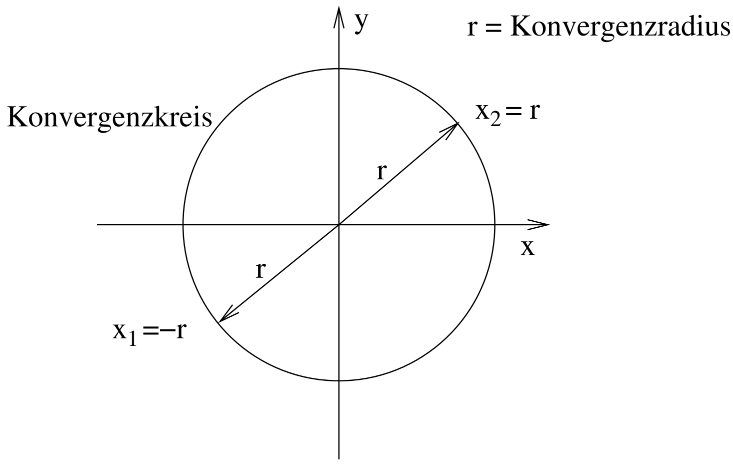


Abbildung 12: Konvergenzkreis

Voraussetzung: $f(x)$ muss in $x = 0$ beliebig oft differnzierbar sein.

Taylor'sche Reihe einer Funktion

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

x_0 ist Entwicklungszentrum oder -punkt.

Näherungspolynome einer Funktion (MacLaurin'sche Polynome)

1. $f(x)$ um $x_0 = 0$ in MacLaurin'sche Reihe entwickelt
2. Durch Abbruch der Reihe nach der n-ten Potenz erhält man dann ein Polynom $f_n(x)$ vom Grad n, das in der Umgebung des Nullpunkts näherungsweise das Verhalten der Funktion $f(x)$ beschreibt:
$$f_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n$$
3. Fehlerabschätzung: Der durch Abbruch der Potenzreihe entstandene Fehler ist durch das Restglied $R_n(x)$ gegeben. Die Abschätzung: Grössenordnung des grössten Reihengliedes, das nicht in die Näherung miteinbezogen wurde.

Integration durch Potenzreihenentwicklung der Integranden (für elementar unlösbare Integrale)

1. $f(x)$ wird in MacLaurin'sche oder Taylor'sche Potenzreihe entwickelt.
2. Die Reihe wird dann gliedweise unter Verwendung der Potenzregel integriert.

6 Komplexe Zahlen

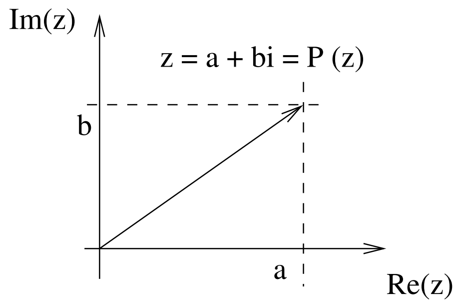


Abbildung 13: Die Gaussche Zahlenebene

$\mathbb{i} = \sqrt{-1}$ imaginäre Einheit. $\mathbb{i}^2 = -1$

$b\,\mathbb{i}$, $b \neq 0$ imaginäre Zahl. Das Quadrat von $b\,\mathbb{i}$ ist stets eine negative reelle Zahl.

$$(b\,\mathbb{i})^2 = b^2\,\mathbb{i}^2 = b^2 \cdot (-1) = -b^2 < 0 \ (b \neq 0)$$

$z = a + b\,\mathbb{i}$ komplexe Zahl (Normalform, algebraische oder kartesische Form)

Realteil $\mathrm{Re}\,(z) = a$

Imaginärteil $\mathrm{Im}\,(z) = b$

Reelle Zahlen $z = a + \mathbb{i} \cdot 0 \equiv a$

Imaginäre Zahlen $z = 0 + b\,\mathbb{i} \equiv b\,\mathbb{i}$

Körper der Komplexen Zahlen $\mathbb{C} = \{a + b\,\mathbb{i} | a, b \in \mathbb{R}\}$

Gleichheit zweier komplexer Zahlen $z_1 = a_1 + b_1\,\mathbb{i}$ und $z_2 = a_2 + b_2\,\mathbb{i}$ sind gleich, wenn $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$.

Konjugierte komplexe Zahl $\overline{z} = z^* = a - b\,\mathbb{i}$ konjugierte komplexe Zahl zu $z = a + b\,\mathbb{i}$. Es ist $\mathrm{Re}\,(\overline{z}) = \mathrm{Re}\,(z)$ und $\mathrm{Im}\,(\overline{z}) = \mathrm{Im}\,(z)$, sowie $z_1 = \overline{z_2}$ und $z_2 = \overline{z_1}$. Es gilt $\overline{(\overline{z})} = z$.

$$\overline{z} = r[\cos(-\varphi) + \sin(-\varphi)\,\mathbb{i}] = r(\cos(\varphi) - \sin(\varphi)\,\mathbb{i})$$

Betrag einer komplexen Zahl

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},\ |z| \geq 0$$
$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$$
$$|z|^2 = z \cdots \overline{z}$$

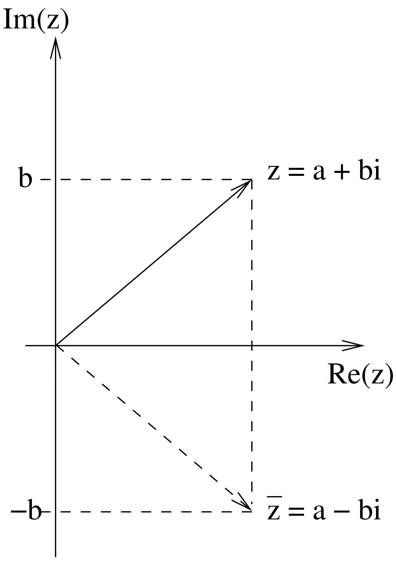


Abbildung 14: Konjugiert komplexe Zahl

6.1 Darstellungsformen komplexer Zahlen

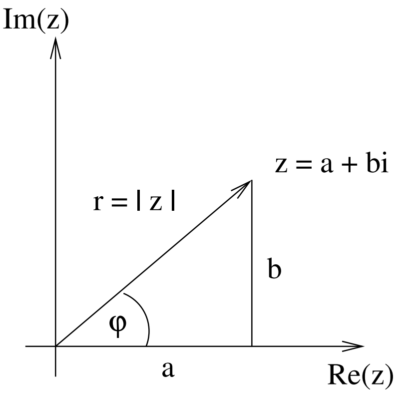


Abbildung 15: Trigonometrische Form komplexer Zahlen

Algebraische oder kartesische Form

$$z = a + b\,\mathbb{i}$$

a: $\mathrm{Re}\,(z)$, b: $\mathrm{Im}\,(z)$

Trigonometrische Form

$$z = r(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\,\mathbb{i})$$

r: $|z|$, φ: Argument ($\angle$) von z. Polarkoordinaten r und φ: $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\phi$

Exponentialform

$$z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathbb{i}\varphi}$$

r: $|z|$, φ: Argument ($\angle$) von z

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathbb{i}\varphi} &= \cos\varphi + \sin\varphi\,\mathbb{i} \\
\cos\varphi &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathbb{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathbb{i}\varphi}\right) \\
\sin\varphi &= \frac{1}{2\,\mathbb{i}}\left(e^{\mathbb{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathbb{i}\varphi}\right)
\end{aligned}$$

Umrechnung Polarform → kartesische Form

$$\left.\begin{array}{l} z = r(\cos\varphi + \sin\varphi\,\mathbb{i}) \text{ oder } z = r\cdot\mathrm{e}^{\mathbb{i}\varphi} \\ a = r\cdot\cos\varphi,\ b = r\cdot\sin\varphi \end{array}\right\} z = \underbrace{(r\cdot\cos\varphi)}_{a} + \underbrace{\mathbb{i}(r\cdot\sin\varphi)}_{b}$$

$\rightsquigarrow z = a + b\,\mathbb{i}$

Umrechung kartesische Form → Polarform

$$\begin{aligned}
&z = a + b\,\mathbb{i} \\
&r = |z| = \sqrt{a^2+b^2},\ \tan\varphi = \frac{a}{b} \text{ (Abhängig vom Quadranten von } z\text{)} \\
\rightsquigarrow\ &z = r(\cos\varphi + \mathbb{i}\sin\varphi) \text{ oder } z = r\cdot\mathrm{e}^{\mathbb{i}\varphi}
\end{aligned}$$

	Quadrant I	Quadrant II/III	Quadrant IV
$\varphi =$	$\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$	$\arctan\left(\frac{b}{a}\right)+\pi$	$\arctan\left(\frac{b}{a}\right)+2\pi$

6.2 Rechenregeln für komplexe Zahlen

6.2.1 Addition und Subtraktion

Nur in kartesischer Form durchführbar

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (a_1 + a_2) + \mathbb{i}(b_1 + b_2) \\
z_1 - z_2 &= (a_1 - a_2) + \mathbb{i}(b_1 - b_2)
\end{aligned}$$

6.2.2 Multiplikation und Division

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= (a_1a_2 - b_1b_2) + \mathbb{i}(a_1b_2 + a_2b_1) \\
&= (a_1 + \mathbb{i}b_1)\cdot(a_2 + \mathbb{i}b_2) \\
\frac{z_1}{z_2} &= z_1 \cdot \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{|z_2|^2}
\end{aligned}$$

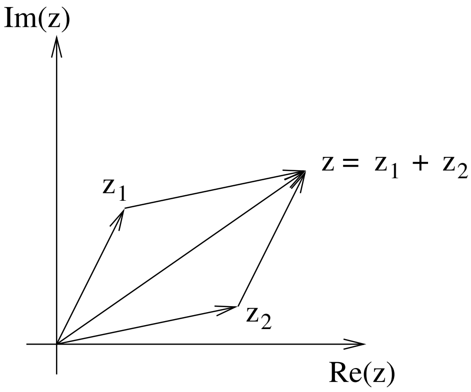


Abbildung 16: Addition komplexer Zahlen

$$
\begin{aligned}
z = \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \mathbb{i}\frac{a_1 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2},\ z_2 \neq 0 \\
z_1 \cdot z_2 &= (r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathbb{i} \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] = (r_1 r_2) \cdot \mathrm{e}^{\mathbb{i}(\varphi_1 + \varphi_2)} \\
\frac{z_1}{z_2} &= \left(\frac{r_1}{r_2}\right)[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathbb{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)] = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) \cdot \mathrm{e}^{\mathbb{i}(\varphi_1 - \varphi_2)} \\
\text{mit } \frac{z_1}{z_2} &= z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \text{ und Erweiterung mit } \overline{z_2}
\end{aligned}
$$

Geometrische Bedeutung der Multiplikation

1. Streckung um das r-Fache
2. Drehung um φ in positivem Drehsinn

6.2.3 Potenzieren

$$
\begin{aligned}
z^n &= \left[r \cdot \mathrm{e}^{\mathbb{i}\varphi}\right]^n = r^n \cdot \mathrm{e}^{\mathbb{i}n\varphi} \\
z^n &= [r(\cos\varphi + \mathbb{i}\sin\varphi)]^n = r^n[\cos(n\varphi) + \mathbb{i}\sin(n\varphi)]
\end{aligned}
$$

Vor Potenzieren in Polarform bringen.

6.2.4 Radizieren

Eine algebraische Gleichung n-ten Grades besitzt in $\mathbb{C}$genau n Lösungen

$$z^n = a = a_0 \cdot \mathrm{e}^{\mathbb{i}\alpha}$$

mit $a \in \mathbb{C}$, $a_0 > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Lösungen in $\mathbb{C}$

$$z_k = r(\cos\varphi_k + \mathbb{i}\sin\varphi_k) = r \cdot \mathrm{e}^{\mathbb{i}\varphi_k}$$

mit

$$r = \sqrt[n]{a_0}, \quad \varphi_k = \frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n}$$

z_k liegen in der Gauss'schen Zahlenebene auf dem Mittelpunktskreis mit Radius $R = \sqrt[n]{a_0}$ und bilden die Ecken eines regelmässigen n-Ecks.

6.3 Eigenschaften der Menge der komplexen Zahlen

1. Summe, Differenz, Produkt und Quotient liegen wieder in $\mathbb{C}$. Division durch 0 nicht erlaubt.

2. Addition und Multiplikation sind kommutativ

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$
$$z_1 z_2 = z_2 z_1$$

3. Addition und Multiplikation sind assoziativ

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$
$$z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$$

4. Addition und Multiplikation sind distributiv

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

7 Matrizen

Reelle Matrix

$$A_{(m,n)} \quad m = \#\text{Zeilen}, \, n = \#\text{Spalten}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Spezielle Matrizen

quadratische Matrix Matrix n-ter Ordnung: $m = n$. Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Nullmatrix sämtliche Elemente verschwinden. Beispiel:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Spaltenmatrix $A_{(m,1)}$:

$$A_{(m,1)} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \text{Spaltenvektor}$$

Zeilenmatrix $A_{(1,n)}$:

$$A_{(1,n)} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = \text{Zeilenvektor}$$

Transposition einer Matrix In A werden Zeilen und Spalten miteinander vertauscht $\rightsquigarrow A^T$:

$$A_{(m,n)} \rightsquigarrow A^T_{(n,m)}$$
$$\left(A^T\right)^T = A$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

Spezielle quadratische Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = A_{(n,n)}$$

Hauptdiagonale von links oben nach rechts unten. *Nebendiagonale* von rechts oben nach links unten

Diagonalmatrix Alle Elemente ausserhalb der Hauptdiagonale sind gleich 0.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix Alle Elemente ausserhalb der Hauptdiagonale = 0 und die Elemente der Hauptdiagonale = 1

$$\mathbb{1} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Dreiecksmatrix Alle Elemente ober- oder unterhalb der Hauptdiagonalen verschwinden.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Symmetrische Matrix

$$a_{ik} = a_{ki} \qquad \text{Bsp:} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Schiefsymmetrische Matrix Alle Diagonalelemente = 0

$$a_{ik} = -a_{ki} \qquad \text{Bsp:} \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -4 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Gleichheit von Matrizen $A = (a_{ik})$ und $B = (b_{ik})$ vom gleichen Typ heissen "gleich" wenn $a_{ik} = b_{ik}$. Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A = B$$

7.1 Rechenoperationen von Matrizen

Addition und Subtraktion Die Matrizen müssen vom selben Typ sein.

$$\begin{aligned} A + B &= B + A \\ A + (B + C) &= (A + B) + C \end{aligned}$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 5+1 & -3+3 \\ 4-1 & 0+4 & 8+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 3 & 4 & 15 \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit einem Skalar

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot (a_{ik}) = (\lambda \cdot a_{ik}) = \lambda A$$

$\lambda \cdot A$ und A vom gleichen Typ

$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$$
$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$
$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

Multiplikation von Matrizen Spaltenzahl von A gleich Zeilenzahl von B. Falkschema (siehe Abbildung 17)

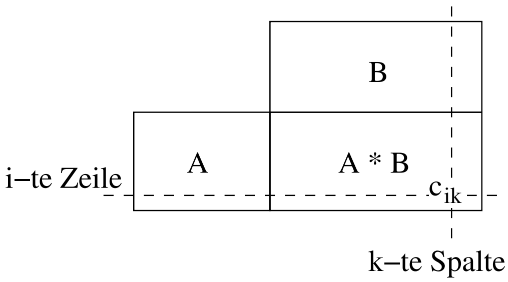


Abbildung 17: Schematische Darstellung des Falkschema

c_{ik} ist das Skalarprodukt aus dem i-ten Zeilenvektor von A und dem k-ten Spaltenvektor von B.

$$AB \neq BA$$
$$A(BC) = (AB)C$$
$$A(B + C) = AB + AC$$
$$(A + B)C = AC + BC$$
$$(AB)^T = B^T A^T$$
$$A\mathbb{1} = \mathbb{1}A = A$$

7.2 Determinanten

Ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten besitzt genau eine Lösung, wenn die Koeffizientendeterminante nicht verschwindet.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det A = |A|$$

7.2.1 Determinante 2. Ordnung

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Berechnung

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Rechenregeln für Determinanten

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

$$\text{Inverse: } \det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A} \quad \text{wenn } A^{-1} \text{ existiert}$$

$$\text{Transponierte: } \det\left(A^{T}\right) = \det A$$

$$\det(A+B) \neq \det A + \det B$$

Eigenschaften von Determinanten (Regeln für n-reihige Determinanten)

1. Der Wert einer Determinante ändert sich *nicht*, wenn Zeilen und Spalten miteinander vertauscht werden.

$$\det\left(A^{T}\right) = \det A$$

2. Beim Vertauschen zweier Zeilen (oder Spalten) ändert eine Determinante ihr Vorzeichen.

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

3. Werden die Elemente einer beliebigen Zeile oder Spalte mit einem rellen Skalar λ multipliziert, so multipliziert sich die Determinante mit λ.

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

4. Eine Determinante wird mit einem reellen Skalar λ multipliziert indem man die Elemente einer beliebigen zeile oder spalte mit λ multipliziert.

5. Besiten die Elemente einer Zeile oder Spalte einen gemeinsamen Faktor λ, so darf dieser vor die Determinante gezogen werden.

6. Eine Determinante besitzt den Wert *Null*, wenn sie mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

   (a) Alle Elemente einer Zeile oder Spalte sind Null.
   (b) Beide Zeilen oder Spalten stimmen überein.
   (c) Zwei Zeilen oder Spalten sind zueinander proportional.
   (d) Eine Zeile oder Spalte ist als Linearkombination der übrigen Zeilen oder Spalten darstellbar.

7. Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man zu einer Zeile oder Spalte ein beliebiges Vielfaches der anderen Zeile oder Spalte Elementweise addiert.

8. $\det (A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$

9. Die Determinante einer n-zeiligen Dreiecksmatrix A besitzt den Wert $\det A = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$, dass heisst die Determinante ist das Produkt der Hauptdiagonalelemente.

7.2.2 Determinanten 3. Ordnung

$$\det A_{(3,3)} = D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

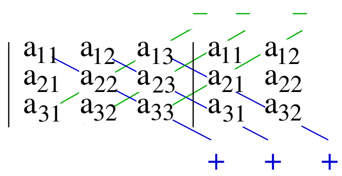


Abbildung 18: Berechnung einer dreireihigen Determinante nach Sarrus

Rechenregeln sinngemäss gleich wie bei Zweireihiger Determinante.

7.2.3 Determinanten höherer Ordnung

Durch Entwickeln nach den Elementen einer Zeile oder Spalte lässt sich die Ordnung einer Determinante reduzieren. Dazu die Zeile oder Spalte mit den meisten Nullen wählen.

Die Vorzeichen werden nach dem Schema in Tabelle 12 auf der nächsten Seite bestimmt.

+	-	+	$\cdots$
-	+	-	$\cdots$
+	-	+	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Tabelle 12: Schema zur Bestimmung der Vorzeichen für die Berechnung von Determinanten höherer Ordnung.

1. Unterdeterminanten bilden. Dazu das Schema in Tabelle 12 verwenden.
$$\begin{vmatrix} a & e & i & m \\ b & f & j & n \\ c & g & k & o \\ d & h & l & p \end{vmatrix} = +a \cdot \begin{vmatrix} f & j & n \\ g & k & o \\ h & l & p \end{vmatrix} - e \cdot \begin{vmatrix} b & j & n \\ c & k & o \\ d & l & p \end{vmatrix} + i \cdot \begin{vmatrix} b & f & n \\ c & g & o \\ d & h & p \end{vmatrix} - m \cdot \begin{vmatrix} b & f & j \\ c & g & k \\ d & h & l \end{vmatrix}$$

2. Die Unterdeterminanten dritter Ordnung nach der Regel von Sarrus (siehe Abbildung 18 auf der vorherigen Seite) berechnen. Unterdeterminanten die von der Ordnung > 3 sind, solange entwickeln bis sie nach Sarrus berechnet werden können.

7.2.4 Elementare Umformungen einer Determinanten

Die elementaren Umformungen einer Determinanten beeinflussen deren Wert *nicht*.

1. Ein den Elementen einer Zeile oder Spalte *gemeinsamer* Faktor darf *vor* die Determinante gezogen werden.

2. Zu einer Zeile oder Spalte darf ein beliebiges Vielfaches einer *anderen* Zeile oder Spalte addiert, beziehungsweise subtrahiert werden.

3. Zwei Zeilen oder Spalten dürfen *vertauscht* werden, wenn gleichzeitig das Vorzeichen der Determinanten geändert wird.

7.2.5 Praktische Berechnung einer n-reihigen Determinante ($n > 3$)

1. Mit Hilfe elementarer Umformungen Elemente einer Zeile oder Spalte bis auf eines auf Null bringen.

2. n-reihige Determinante nach den Elementen dieser Zeile oder Spalte entwickeln mit dem Resultat: $(n-1)$-reihige Unterdeterminante.

3. 1. und 2. auf die $(n-1)$-reihige Unterdeterminante anwenden $\rightsquigarrow$ $(n-2)$-reihige Unterdeterminante. 1. und 2. solange wiederholen bis eine dreireihige Determinante entsteht. Danach die Regel von Sarrus anwenden.

Tipp: Um in einer *Zeile* Nullen zu erzeugen, Spalten addieren.

7.3 Ergänzungen

Reguläre Matrix Eine n-reihige, *quadratische* Matrix mit

- $\det A \neq 0 \rightsquigarrow$ regulär
- $\det A = 0 \rightsquigarrow$ singulär

Inverse Matrix gilt für eine n-reihige, *quadratische* Matrix

$$A \cdot X = X \cdot A = E$$

so heisst X die zu A inverse Matrix A^{-1}.

A ist somit invertierbar (umkehrbar). Daraus folgt das A *regulär* sein muss, dass heisst $\det A \neq 0$. Somit gibt es eine Lösung für A^{-1}

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$$

Orthogonale Matrix Für quadratische, n-reihige Matrizen

$$A \cdot A^T = E$$
$$\rightsquigarrow \det A = \pm 1 \rightsquigarrow \det A \neq 0 \rightsquigarrow A_{ort} \text{ regulär}$$
$$\rightsquigarrow A^T = A^{-1} \text{ für } A_{ort}$$

Rang einer Matrix Rangbestimmung r einer (m, n)-Matrix A für $m \leq n$

1. berechnen der m-reihigen Unterdeterminante von A $r = m$, wenn mindestens eine $\det \neq 0$
2. alle m-reihigen Unterdeterminanten gleich 0; prüfen ob $(m-1)$-reihige Unterdeterminante $\neq 0$. Ordnung r dieser $\det =$ Rang der Matrix A

$$\mathrm{Rg}\,(A) = r$$

Eigenschaften des Rangs

- $r \leq \begin{cases} m & m \leq n \\ n & n < m \end{cases}$
- $r \leq n$ für n-reihige, quadratische Matrizen
  - Reguläre A: $\det A \neq 0$, dass heisst $r = n$
  - Singuläre A: $\det A = 0$, dass heisst $r < n$
- n-reihige Nullmatrix: $\mathrm{Rg}\,(0) = 0$

7.3.1 Elementare Umformungen einer Matrix

Der Rang einer Matrix A verändert sich *nicht*, wenn

1. zwei Zeilen oder Spalten miteinander vertauscht werden
2. Die Elemente einer Zeile oder Spalte mit einer beliebigen von Null verschiedenen Zahl multipliziert oder durch eine solche Zahl dividiert werden
3. zu einer Zeile oder Spalte ein beliebiges Vielfaches einer anderen Zeile beziehungsweise Spalte addiert wird.

Ziel: ranggleiche Matrix B vom gleichen Type und von trapezförmiger Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} & b_{1\,r+1} & b_{1\,r+2} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2r} & b_{2\,r+1} & b_{2\,r+2} & \cdots & b_{2n} \\ & & & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & b_{rr} & b_{r\,r+1} & b_{r\,r+2} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

r Zeilen und $m-r$ Nullzeilen. $\mathrm{Rg}\,(A) =$ Anzahl r der nicht-verschwindenden Zeilen $= r$.

8 Lineare Gleichungssysteme

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 \;+ a_{12}x_2 \;+ \cdots + a_{1n}x_n \;= c_1 \\ a_{21}x_1 \;+ a_{22}x_2 \;+ \cdots + a_{2n}x_n \;= c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m \end{array}$$

$$\rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow AX = C$$

Erweiterte Koeffizienten Matrix Ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten besitzt genau eine Lösung, wenn die Koeffizientendeterminante *nicht* verschwindet.

$$(A|C) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & c_m \end{array}\right)$$

8.1 Lösungsmenge eines linearen (m, n)-Systems

1. Inhomogenes lineares Gleichungssystem $AX = C$ hat eine, ∞, oder keine Lösung.
2. Homogenes lineares Gleichungssystem $AX = 0$ hat eine (triviale Lösung $x = 0$) oder ∞ Lösungen inklusive trivialer Lösung

Siehe auch Abbildung 19.

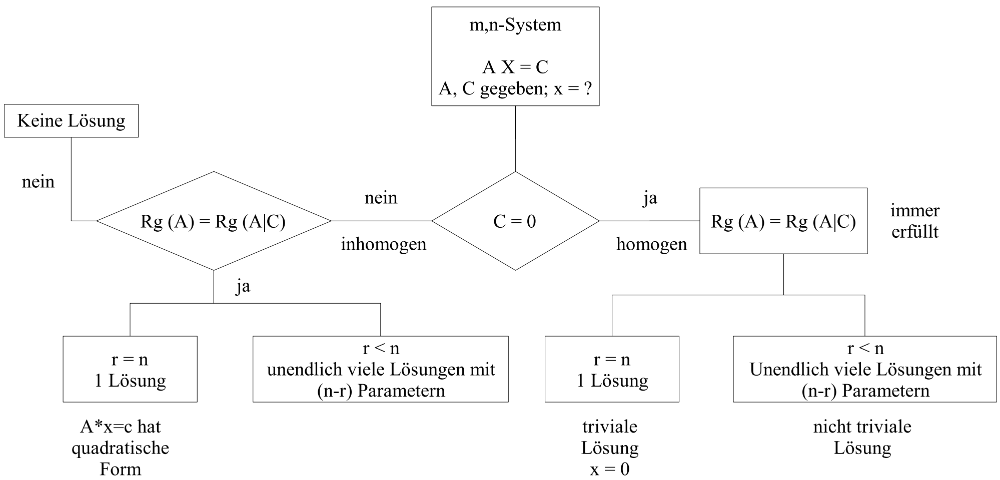


Abbildung 19: Diagramm zur Bestimmung der Lösungsmenge von linearen (m, n)-Systemen

8.2 Lösen eines linearen Gleichungssystem mit dem Gauss'schen Algorithmus

Wenn das System lösbar ist:

1. $(A|C)$ mit Hilfe elementarer Zeilenumformung in ranggleiche Matrix mit Trapezform überführen $\rightsquigarrow A^*|C^*$
2. lineares Gleichungssystem liegt in gestaffelter Form $A^*|x = C^*$ vor und lässt sich sukzessiv von unten nach oben lösen.

Verschwindet eine Varible, ist sie ein frei wählbarer Parameter λ. Siehe auch Abbildung 20 auf der nächsten Seite.

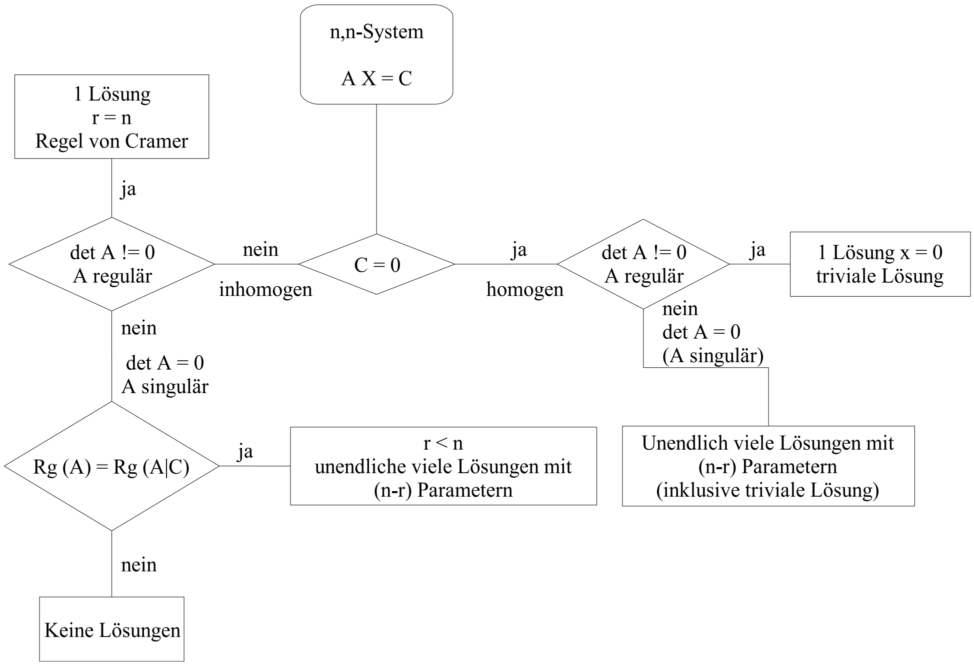


Abbildung 20: Diagramm zur Bestimmung der Lösungsmenge von linearen (n, n)-Systemen

8.3 Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Definition Die n Vektoren $a_1, a_2, \ldots, a_n$ aus $\mathbb{R}^m$ heissen linear *unabhängig*, wenn die lineare Vektorgleichung $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n = 0$ für $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ erfüllt werden kann. Linear *abhängig*, wenn nicht alle Koeffizienten der Gleichung verschwinden, dass heisst mindestens ein Koeffizient nicht Null ist.

Linear abhängige Vektoren Vektorsystem $a_1, a_2, \ldots, a_n$ besitzt mindestens eine der folgenden Eigenschaften

1. das Vektorsystem besitzt den Nullvektor
2. das Vektorsystem enthält zwei gleiche oder zwei kollineare Vektoren
3. mindestens einer der n Vektoren ist als linearkombination der übrigen Vektoren darstellbar

Linear unabhängige Vektoren Wenn die aus ihnen gebildete Matrix $A = (a_1\ a_2\ \ldots\ a_n)$ den Rang $r = n$ besitzt. Aber: linear unabhängig, wenn $r < n$

8.3.1 Zusammenfassung

1. n Vektoren $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in $\mathbb{R}^n$ sind genau dann linear *unabhängig*, wenn die aus diesem Vekor gebildeten n-reihige Matrix A regulär ist, dass heisst det $\neq 0$:

$$A \text{ regulär } \Leftrightarrow \text{ linear unabhängige Vektoren}$$

2. A singulär $\Leftrightarrow$ linear abhängige Vektoren ($\det A = 0$)
   - Vektorsystem enthält Nullvektor oder
   - Vektorsystem enthält zwei kollineare Vektoren oder
   - einer der Vektoren als linearkombination der übrigen Vektoren darstellbar ist

3. in $\mathbb{R}^n$ gibt es maximal n linear unabhängige Vektoren. Wenn mehr als n Vektoren vorhanden sind: linear abhängige Vektoren.

9 Eigenwerte und Eigenvektoren einer n-reihigen Matrix

$$(A - \lambda E)X = 0 \qquad \begin{array}{ll} \lambda: & \text{Eigenwert von } A \\ x: & \text{Eigenvektor von } A \text{ zu Eigenwert } \lambda \end{array}$$

Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren

1. Eigenwerte: Lösung von $\det(A - \lambda E) = 0 \rightsquigarrow$ algebraische Gleichung n-ten Grades mit Lösung $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

2. Eigenvektoren: Lösungsvektor des homogenen linearen Gleichungssystem $(A - \lambda_i E)x_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

Eigenschaften der Eigenwerte

1. Spaltenwert von A ($\sum$ aller Diagonalelemente) $= \sum$ aller λ

$$\mathrm{Sp}\,(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

2. $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$

3. $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_n \Rightarrow \lambda_i \overset{\text{nur } 1}{\rightarrow} x_1 \quad x_i =$ linear unabhängig

4. Tritt ein λ k-fach auf, gehören mindestens eine und höchstens k linear unabhängige Eigenvektoren

5. Die zu verschiedenen Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren sind immer linear unabhängig

Bemerkung

- $\lambda =$ Nullstelle von $\det(A - \lambda E)$
- A regulär, wenn alle $\lambda \neq 0$
- $\lambda_i =$ Eigenwert von $A \Rightarrow \frac{1}{\lambda_i} =$ Eigenwert von A^{-1}
- wenn mehrfache Eigenwerte vorhanden sind, so ist die Summe der linear unabhängigen Eigenvektoren $\leq n$

Eigenwerte und Eigenvektoren spezieller Matrizen

- Die Eigenwerte einer n-reihigen Diagonal- beziehungsweise Dreiecksmatrix A sind identisch mit den Hauptdiagonalelementen:

$$\lambda_i = a_{ii} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

- Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix ($A = A^T$):
  1. alle n Eigenwerte sind $\mathbb{R}$
  2. Total n linear unabhängige Eigenvektoren
  3. zu jdem einfachen $\lambda \rightarrow$ ein linear unabhängiger Eigenvektor. Zu jedem k-fachen $\lambda \rightarrow k$ linear unabhängige Eigenvektoren
  4. Eigenvektoren, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, sind orthogonal

10 Differential und Integral mit mehreren Variablen

$$z = f(x; y) \qquad x, y: \text{ unabhängige Variablen; } z: \text{ abhängige Variable}$$
$$u = f(x; y; z) \qquad x, y, z: \text{ unabhängige Variablen; } u: \text{ abhängige Variable}$$

Analytische Darstellung

$$z = f(x; y) \text{ (explizite Darstellung)}$$
$$F(x; y; z) = 0 \text{ (implizite Darstellung)}$$

Funktionstafel

$z = f(x; y)$

$x\backslash y$	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_n
x_1	z_{11}	z_{12}	z_{13}	$\cdots$	z_{1n}
x_2	z_{12}	z_{22}	z_{23}	$\cdots$	z_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	z_{m1}	z_{m2}	z_{m3}	$\cdots$	z_{mn}

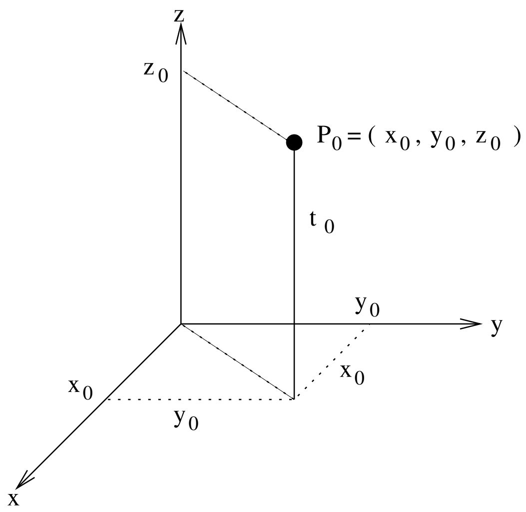


Abbildung 21: Graphische Darstellung eines Punktes einer Funktion f mit mehreren Variablen. ($z = f(x; y)$, z: Höhenkoordinate)

Graphische Darstellung Siehe Abbildung 21.

10.1 Partielle Ableitung

10.1.1 1. Ordnung

- $z = f(x; y)$ nach x:

$$f_x(x; y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

  nach y:

$$f_y(x; y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

- geometrische Deutung: $f_x(x; y)$: Anstieg der Flächentangente im Flächenpunkt $p = (x; y; z)$ in der x-Richtung. $f_y(x; y)$: Anstieg der Flächentangente im Flächenpunkt $p = (x; y; z)$ in der y-Richtung

- n unabhängige Variablen $\rightarrow$ n partielle Ableitungen 1. Ordung

- alle unabhängigen Variablen ausser der Differentialvariable (bei $\frac{\partial f}{\partial x} = x$ als konstant betrachten $\rightarrow$ ableiten

- Ableitungsregeln sind gleich wie bei Funktionen mit einer Variablen

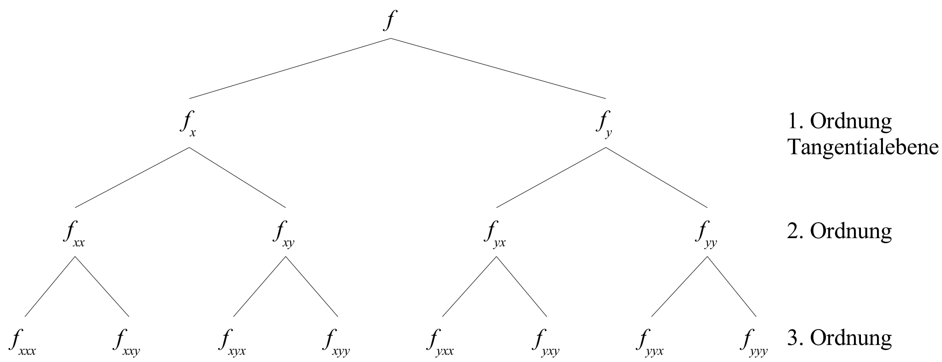


Abbildung 22: Partielle Ableitung höherer Ordnung

10.1.2 Höhere Ordnung

$$\begin{aligned}
f_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\
f_{yx} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\
f_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} \\
f_{xyx} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}
\end{aligned}$$

Satz von Schwarz Bei einer gemischten partiellen Ableitung k-ter Ordnung darf die Reihenfolge der einzelnen Differentiationschritte vertauscht werden, wenn die partiellen Ableitungen k-ter Ordnung stetige Funktionen sind.

$$f_{xy} = f_{yx}; \quad f_{xxy} = f_{yxx} = f_{xyx}; \quad f_{yyx} = f_{xyy} = f_{yxy}$$

Tangentialebene

$$\begin{aligned}
y &= f(x) \rightsquigarrow \text{ Kurventangente} \\
z &= f(x;y) \rightsquigarrow \text{ Tangentialebene}
\end{aligned}$$

Fläche von $z = f(x;y)$ und Tangentialebene berühren sich in einem Punkt.

Die Tangentialebene besteht aus allen Punkten (x, y, z) so dass

$$z - z_0 = \underbrace{f_x(x_0;y_0)}_{\frac{\partial f}{\partial x}} \cdot (x - x_0) + \underbrace{f_y(x_0;y_0)}_{\frac{\partial f}{\partial y}} \cdot (y - y_0)$$

$$\begin{aligned} t - t_0 =& \frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0; z_0)(x - x_0) + \\ & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0; z_0)(y - y_0) + \\ & \frac{\partial f}{\partial z}(x_0; y_0; z_0)(z - z_0) \end{aligned}$$

Totales oder vollständiges Differential

$$\mathrm{d}z = f_x \,\mathrm{d}x + f_y \,\mathrm{d}y = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

Geometrische Bedeutung: beschreibt die Änderung der Höhenkoordinate beziehungsweise des Funktionswertes z auf die im Berührungspunkt $P = (x_0; y_0; z_0)$ errichteten Tangentialebene. $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ = Koordinaten eines beliebigen Punktes auf der Tangentialebene bezogen auf den Punkt P.

10.1.3 Kettenregel

Für Funktionen mit einem Parameter

zwei Variablen

$$\begin{aligned} z =& \underbrace{f(x; y);}_{\text{Äussere Fkt.}} \ \underbrace{x = x(t),\ y = y(t)}_{\text{Innere Fkt}},\ t_1 \leq t \leq t_2 \\ z =& f(x(t); y(t)) = F(t),\ t_1 \leq t \leq t_2 \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} =& \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ z =& z_x \dot{x} + z_y \dot{y} \end{aligned}$$

drei Variablen

$$\begin{aligned} u =& f(x; y; z);\ x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} =& \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

usw.

Für Funktionen mit zwei Parametern und zwei Variablen

$$\begin{aligned} z =& f(x; y);\ x = x(u; v),\ y = y(u; v) \\ z =& f(x(u; v); y(u; v)) = F(u; v) \\ \frac{\partial z}{\partial u} =& \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = z_u = z_x x_u + z_y y_n \\ \frac{\partial z}{\partial v} =& \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = z_v = z_x x_v + z_y y_v \end{aligned}$$

Für Funktionen mit drei Variablen und zwei Parametern

$$\begin{aligned} &f(x,y,z); \quad x = x(t,s),\ y = y(t,s),\ z = z(t,s) \\ G(t,s) =& t(x(t,s); y(t,s); z(t,s)) \\ \frac{\partial G}{\partial t} =& \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial t}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial s} =& \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial t}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s} \end{aligned}$$

Extremwerte

- Extrempunkte = kritische Punkte
- Extrema

$$\left.\begin{array}{l} \text{relatives Maximum: } f(x_0; y_0) > f(x,y) \\ \text{relatives Minimum: } f(x_0; y_0) < f(x,y) \end{array}\right\} \begin{array}{l} (x;y) \neq (x_0; y_0) \\ (\text{rel.} = \text{lokal}) \end{array}$$

- Voraussetzungen für relative Extrema $(x_0; y_0)$:
  1. $f_x(x_0; y_0) = 0$ und $f_y(x_0; y_0) = 0$. Die partielleb Ableitungen erster Ordnung verschwinden.
  2. $\Delta = f_{xx}(x_0; y_0) \cdot f_{yy}(x_0; y_0) - f_{xy}^2(x_0; y_0) > 0$

Theorem Sei $(x_0; y_0)$ ein kritischer Punkt für f (dass heisst $\nabla f(x_0, y_0) = 0$). Betrachte:

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

a. $\Delta < 0 \rightsquigarrow (x_0, y_0)$ kein Extrema, sondern Sattelpunkt

b. $\Delta = 0 \rightsquigarrow$ keine Aussage

c. $\Delta > 0 \rightsquigarrow (x_0, y_0)$ Extrema $\begin{cases} f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \rightsquigarrow \text{Maximum} \\ f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \rightsquigarrow \text{Minimum} \end{cases}$

Anwendung

- Implizite Differentiation:

$$y'(x_0) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0)$$

für eine impliziert definierte Funktion $F(x,y)$

$$y'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

- Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen: Lagranges Multiplikationsverfahren (λ)
  - Ausgangslage
    1. $f(x;y)$
    2. Nebenbedingung: in der Regel implizit: $\varphi(x;y) = 0$
  - Vorgehen
    1. Hilfsfunktion: $F(x;y;\lambda) = f(x;y) + \lambda \cdot \varphi(x;y)$ (Zusätzlich λ=Parameter)
    2. Partielle Ableitung erster Ordnung = 0:

$$\begin{aligned}F_x &= f_x(x;y) + \lambda \cdot \varphi_x(x;y) = 0\\ F_y &= f_y(x;y) + \lambda \cdot \varphi_y(x;y) = 0\\ F_x &= \varphi(x;y) = 0\end{aligned}$$

  - Gleichungssystem lösen

11 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Explizite Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' = 2x$$

Implizite Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y' + yy'' = 0$$

Explizite Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{s} = -g$$

Anfangswertprobleme Gewöhnliche Differentialgleichung mit Zusatzbedingung $\rightsquigarrow$ spezielle Lösung

Differentialgleichung 1 Ordnung mit einem Anfangswert

$$y' = 2x, y(0) = 1$$

Lösung
allgemeine Lösung

$$y(x) = x^2 + c \; \forall c \in \mathbb{R}$$

spezielle Lösung

$$y(0) = 1 \rightsquigarrow 1 = 0^2 + c \rightsquigarrow c = 1 \rightsquigarrow y(x) = x^2 + 1$$

Randwertprobleme Eine gegebene Differentialgleichung n-ter Ordnung (explizit/implizit) mit n Parameter/Konstanten $\rightsquigarrow$ abhängige/spezielle Lösung.

$$s''(x) = -g, \ s(0) = 1, \ s(1) = 2$$

Lösung

$$\begin{aligned} s(x) =& -g\frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 \\ s(0) = 1 \leftrightarrow& \ c_2 = 1 \\ s(1) = 2 \leftrightarrow& -\frac{9}{2} + c_1 + \underbrace{c_2}_{1} - 2 \rightsquigarrow \begin{array}{l} c_1 = 1 + \frac{1}{2} \\ c_2 = 1 \end{array} \\ \rightsquigarrow s(x) =& -\frac{9}{2}x^2 + \left(1 + \frac{9}{2}\right) x + 1 \end{aligned}$$

Trennung der Variablen $y' = f(x) \cdot g(y)$ (=Differentialgleichung 1. Ordnung) lösen

1. Trennung der beiden Variablen: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x) \cdot g(y) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x$
2. Integration auf beiden Seiten der Gleichung $\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x \quad (g(y) \neq 0) \Rightarrow F_1'(y) = F_2(x)$
3. Nach Möglichkeit löse $y = y(x)$ auf.

Falls $g(y) = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y(x) = c$

Beispiel

$$\begin{aligned} y' =& y \\ f(x) =& 1 \\ g(y) =& y \end{aligned}$$

1. $y' = y \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = \mathrm{d}x$
2. $\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \mathrm{d}x \Rightarrow \ln|y| = x + c \Rightarrow |y| = \mathrm{e}^{x+c} = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^c \rightarrow k_1 > 0$
   $y = \pm c \cdot \mathrm{e}^x$ oder $y = k\mathrm{e}^x$

Integration durch Substitution

a. $y' = f(ax + by + c)$ Substitution: $u = ax + by + c$

b. $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ Substitution: $u = \frac{y}{x}$

Lösung:

1. Substitution
2. Integration der neuen Differentialgleichung 1. Ordnung für die Hilfsfunktion und durch Trennung der Variablen
3. Rücksubstitution und Auflösung der Gleichung nach y

Beispiel a.

$$y' = f(ax + by + c) \quad \text{Gesucht: } x \mapsto y(x)$$

1. Berechne $n = ax + by + c \quad u' = a + by'$
2. $\frac{u'-a}{b} = f(u) \Leftrightarrow u' = a + bf(n)$
3. Separation der Variablen u und x; zurück zu y

Beispiel b.

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{Gesucht: } x \mapsto y(x)$$

1. Berechne $u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = xu$
2. Ableitung (Produktregel) $y' = 1 \cdot u + x \cdot u'$
3. neue Form der Gleichung $u + xu' = f(n) \Leftrightarrow x \cdot u' = f(u) - u$
   $x \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f(u) - u \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}u}{f(n)-n} = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$
4. Seperation der Variablen $\rightsquigarrow$ Integration $\rightsquigarrow$ zurück zu y

Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung Eine Differentialgleichung 1. Ordnung heisst linear, wenn sie die Form $y' + f(x) \cdot y = g(x)$

$$\begin{aligned} g(x) =&\ \text{Störfunktion/Störglied} \\ g(x) = 0 \rightarrow&\ \text{homogene lineare Differentialgleichung} \\ g(x) \neq 0 \rightarrow&\ \text{inhomogene lineare Differentialgleichung} \end{aligned}$$

Integrations Methoden

- Homogene Differentialgleichung

$$y' + f(x) \cdot y = 0 \rightarrow y = C \cdot \mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + f(x)y = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -f(x)y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int -f(x)\,\mathrm{d}x$$

1. $x^2y' + y = 0$ oder $y' + \frac{1}{x^2}y = 0 \quad (x \neq 0)$

$$y = c\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{x^2}y = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \Rightarrow \ln|y| = \frac{1}{x} + \ln|c|$$
$$\ln|y| - \ln|c| = \ln\left|\frac{y}{c}\right| = \frac{1}{x}$$

2. $y' - 2xy = 0,\ y(0) = 5$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2xy = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = 2x\,\mathrm{d}x$$
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int 2x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \ln|y| = x^2 + \ln|c|$$
$$\ln|y| - \ln|c| = \ln\left|\frac{y}{x}\right| = x^2 \Rightarrow \frac{y}{c} = \mathrm{e}^{x^2}$$
$$y = c\mathrm{e}^{x^2} \quad \text{allgemeine Lösung}$$
$$y(0) = 5 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow y = 5\mathrm{e}^{x^2} \quad \text{spezielle Lösung}$$

- inhomogene lineare Differentialgleichung
  - $y' + f(x) \cdot y = g(x)$ Lösung durch "Variation der Konstanten"
    1. Integration von $y' + f(x) \cdot y = 0$ durch Trennung der Variablen:
    $$y_0 = c \cdot \mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$$
    2. Variation der Konstanten: $c \to c(x)$ mit Lösungsansatz
    $$y = c(x) \cdot \mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$$
    in die inhomogene Lineare Differentialgleichung einfügen und durch unbestimmte Integration lösen.
  - $y' + f(x) \cdot y = g(x)$ Aufsuchen einer partikulären Lösung

$$\underbrace{y(x)}_{\text{Lös. v. } y' + f(x) \cdot y = g(x)} = \overbrace{y_0(x)}^{\text{Lös. v. } y' + f(x) \cdot y = 0} + y_p(\underbrace{x}_{\text{bel. part. Lsg d. inhom. lin. Diffgl.}})$$

1. Integration von $y'+f(x)y=0$ durch Trennung der Variablen:

$$y_0 = c \cdot \mathrm{e}^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$$

2. mit Hilfe eines geeigneten Lösungsansatzes, eine partielle Lösung y_p von $g(x)$ bestimmen.
3. allgemeine Lösung $= y = y_0 + y_p$

- lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten
  - homogene Differentialgleichung $y' + ay = 0$ $(a \neq 0)$: allgemeine Lösung $y_0 = c \cdot \mathrm{e}^{-ax}$
  - inhomogene Differentialgleichung $y' + ay = g(x)$ $(a \neq 0)$: Lösung durch Variation der Konstanten oder Suchen einer partiellen Lösung y_p.
- lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Gegeben:

$$y'' + ay' + by = g(x) \tag{1}$$

Lösung:

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x)$$

Vorgehen

1. Bestimme $y_0(x)$
2. Bestimme $y_p(x)$ mit einem geeigneten Ansatz
3. $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$
4. Kontrolle durch einsetzen in (1)

12 Doppelintegrale (Flächenintegrale)

$$\iint_{(A)} f(x;y)\,\mathrm{d}A = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\Delta A_k \to 0)}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k;y_k)\Delta A_k$$

Berechnung

- in kartesischen Koordinaten:

$$\iint_{(A)} f(x;y)\,\mathrm{d}A = \int_{x=a}^{b} \int_{y=f_n(x)}^{f_0(x)} f(x;y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

f_0: Randkurve oben. f_n: Randkurve unten.

1. Innere Integration nach der Variable y . x=Konstante, nach y integrieren.
2. Äussere Integration nach der Variable x. Gewöhnliche Integration nach x.

Reihenfolge der Integration (innen/aussen) ist nicht vertauschbar.

- in Polarkoordinaten

$$x = r \cdot \cos\varphi, \quad y = r \cdot \sin\varphi \qquad (r \geq 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi)$$
$$\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\varphi$$
$$\iint_{(A)} f(x;y)\,\mathrm{d}A = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} f(r \cdot \cos\varphi; r \cdot \sin\varphi) \cdot r\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\varphi$$

1. Innere Integration nach Variable r, wobei φ als Parameter festgehalten wird
2. Äussere Integration nach der Variable φ

Anwendung

- Flächeninhalt:

$$A = \iint_{(A)} \mathrm{d}A = \int_{x=a}^{b} \int_{y=f_n(x)}^{f_0(x)} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} r\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\varphi$$

Bemerkung:

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [f_0(x) - f_n(x)]\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} r\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\left[r^2\right]_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} \\ &= \frac{1}{2}\left[r_a^2(\varphi) - r_i^2(\varphi)\right] \\ \rightarrow A &= \frac{1}{2} \cdot \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[r_a^2(\varphi) - r_i^2(\varphi)\right]\,\mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

- Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche:

$$x_s = \frac{1}{A} \cdot \iint_{(A)} x\,\mathrm{d}A, \qquad y_s = \frac{1}{A} \iint_{(A)} y\,\mathrm{d}A \text{ (Definitionsformeln)}$$
$$x_s = \frac{1}{A} \cdot \int_{x=a}^{b} \int_{y=f_n(x)}^{f_0(x)} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x, \qquad y_s = \frac{1}{A} \cdot \int_{x=a}^{b} \int_{y=f_n(x)}^{f_0(x)} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$
$$x_s = \frac{1}{A} \cdot \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} r^2 \cdot \cos\varphi\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\varphi, \qquad y_s = \frac{1}{A} \cdot \int_{\varphi=\varphi_2}^{\varphi_2} \int_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} r^2 \cdot \sin\varphi\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\varphi$$

Bemerkung:

$$x_s = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x\,[f_x(x) - f_n(x)]\,\mathrm{d}x, \qquad y_s = \frac{1}{2A} \int_a^b \left[f_0^2(x) - f_n^2(x)\right]\,\mathrm{d}x$$

$$x_s = \frac{1}{3A} \cdot \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[r_a^3(\varphi) - r_i^3(\varphi)\right] \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi, \quad y_s = \frac{1}{3A} \cdot \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[r_a^3(\varphi) - r_i^3(\varphi)\right] \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

- Flächenmomente (Flächenträgheitsmomente)
  (axiales Flächenmoment bezüglich der x-Achse)

$$I_x = \iint_{(A)} y^2\,\mathrm{d}A = \int_{x=a}^{b} \int_{y=f_n(x)}^{f_0(x)} y^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} r^3 \sin^2\varphi\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\varphi$$

(axiales Flächenmoment bezüglich der y-Achse)

$$I_y = \iint_{(A)} x^2\,\mathrm{d}A = \int_{x=a}^{b} \int_{y=f_n(x)}^{f_0(x)} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} r^3 \cos^2\varphi\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\varphi$$

(polares Flächenmoment)

$$I_p = \iint_{(A)} r^2\,\mathrm{d}A = I_x + I_y = \int_{x=a}^{b} \int_{y=f_n(x)}^{f_0(x)} \left(x^2 + y^2\right)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{\varphi=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r=r_i(\varphi)}^{r_a(\varphi)} r^3\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\varphi$$

Bemerkung

$$I_x = \frac{1}{3} \cdot \int_a^b \left[f_0^3(x) - f_n^3(x)\right]\,\mathrm{d}x; \;\; I_y = \int_a^b x^2\,[f_0(x) - f_u(x)]\,\mathrm{d}x$$

13 Dreifachintegrale (Volumenintegrale)

$$v = \iiint_{(V)} f(x;y;z)\,\mathrm{d}V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta V_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(x_k;y_k;z_k)\Delta V_k$$

Berechnung

- kartesische Koordinaten

$$\iiint_{(V)} f(x;y;t)\,\mathrm{d}V = \underbrace{\int_{x=a}^{b} \underbrace{\int_{y=f_n(x)}^{f_0(x)} \underbrace{\int_{z=z_n(x;y)}^{z_0(x;y)} f(x;y;z)\,\mathrm{d}z}_{\text{1. Integration}}\,\mathrm{d}y}_{\text{2. Integration}}\,\mathrm{d}x}_{\text{3. Integration}}$$

z_0= obere Grenze = Deckelfläche. z_u= untere Grenze = Bodenfläche.

1. Integration: x und y als Konstante behandelt
2. Integration: x als Konstante behandelt
3. Integration: gewöhnliche Integration

- Zylinderkoordinaten

  $x = r\cos\varphi,\ y = r\cdot\sin\varphi,\ z = z,\ \mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = (\mathrm{d}A)\,\mathrm{d}z$

  beziehungsweise

  $$x = \sqrt{x^2+y^2},\ \tan\varphi = \frac{y}{x},\ z = z; \quad 0 \leq \varphi 2\pi$$
  $$\iiint_{(V)} f(x;y;z)\,\mathrm{d}V = \iiint_{(V)} f(r\cdot\cos\varphi; r\cdot\sin\varphi; z)\cdot r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

  Integration: drei nacheinander auszuführende gewöhnliche Integrationsschritte in der Reihenfolge z, r und φ.

Anwendung

- Volumen eines zylinder Körpers

  $$V = \iiint_{(V)} \mathrm{d}V = \int_{x=a}^{b}\int_{y=f_n(x)}^{f_0(x)}\int_{z=z_n(x;y)}^{z_0(x;y)} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

- Volumen eines Rotationskörpers (Rotationsachse: z-Achse)

  $$V = \iiint_{(V)} r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

- Schwerpunkt eines homogenen Körpers

  $$x_s = \frac{1}{V}\cdot\iiint_{(V)} x\,\mathrm{d}V = \frac{1}{V}\cdot\int_{x=a}^{b}\int_{y=f_n(x)}^{f_0(x)}\int_{z=z_n(x;y)}^{z_0(x;y)} x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$
  $$y_s = \frac{1}{V}\cdot\iiint_{(V)} y\,\mathrm{d}V = \frac{1}{V}\cdot\int_{x=a}^{b}\int_{y=f_n(x)}^{f_0(x)}\int_{z=z_n(x;y)}^{z_0(x;y)}$$
  $$z_s = \frac{1}{V}\iiint_{(V)} z\,\mathrm{d}V = \frac{1}{V}\cdot\int_{x=a}^{b}\int_{y=f_n(x)}^{f_0(x)}\int_{z=z_n(x;y)}^{z_0(x;y)} z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

- Schwerpunkt eines homogenen Rotationskörpers. Schwerpunkt $S = (x_s; y_s; z_s)$

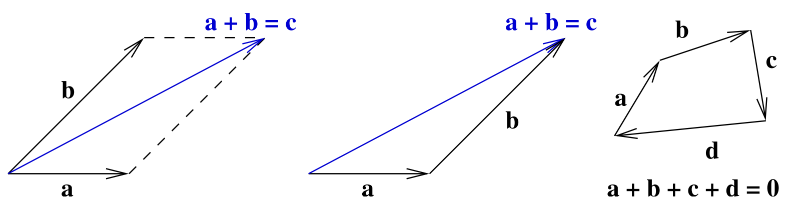
  $$x_s = 0,\ y_s = 0\ z_s = \frac{1}{V}\cdot\iiint_{(V)} zr\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

  gemäss Formel für Volumen berechnen

14 Vektoralgebra

- Ein Vektor ist eine mathematische Grösse, die durch Richtung und Länge (Massstab)/Betrag eindeutig bestimmt ist.
- Der Betrag eines Vektors ist stets positiv: $|\mathbf{a}| = a \geq 0$.
- Ein Vektor ist eindeutig bestimmt durch Ausgangs- und Endpunkt P und Q $\mathbf{PQ}$.
- Der Nullvektor $\mathbf{0}$: Jeder Vektor mit Betrag 0 ($|\mathbf{0}| = 0$).
- Einheitsvektor $\mathbf{e}$: Jeder Vektor vom Betrag $|\mathbf{e}| = 1$.
- Ortsvektor $\mathbf{r}(P) = \mathbf{OP}$: vom Koordinatenursprung zum Punkt P.
- $\mathbf{a} = \mathbf{b}$: wenn sie in Betrag und Richtung übereinstimmen, dass heisst durch Parallelverschiebung ineinander überführt werden können.
- $\mathbf{a} \upuparrows \mathbf{b}$: zwei Vektoren mit gleicher Richtung.
- $\mathbf{a} \upharpoonleft\!\downharpoonright \mathbf{b}$: zwei Vektoren mit entgegengesetzter Richtung (anit-parallel).

14.1 Vektoroperationen



(a) Addition von zwei Vektoren (b) Parallelverschiebung (c) Nullvektor

Abbildung 23: Vektor Addition

Addition Siehe Abbildung 23.

1. Vektor $\mathbf{b}$ wird parallel verschoben, bis sein Anfangspunkt in den Anfangspunkt von $\mathbf{a}$ fällt.
2. Parallelogrammregel:

   (a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

   (b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

Subtraktion $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$. Siehe Abbildung 24 auf der nächsten Seite.

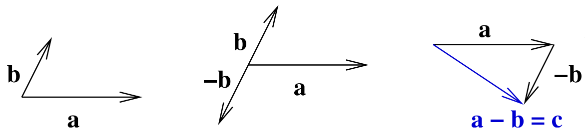


Abbildung 24: Vektor Subtraktion

Multiplikation mit einem Skalar

$$\mathbf{a} = \lambda \mathbf{a}$$

Eigenschaften:

- $|\mathbf{b}| = |\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$
- $\lambda > 0$: $\mathbf{b} \upuparrows \mathbf{a}$
- $\lambda < 0$: $\mathbf{b} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$
- $\lambda = 0$: $\mathbf{0}$

14.2 Vektorrechnung in der Ebene (2D)

Komponentendarstellung

$$\mathbf{a} = \underbrace{\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y}_{\text{Vektorkomponenten von } \mathbf{a}} = \underbrace{\mathbf{a}_x}_{\lambda} \mathbf{e}_x + \underbrace{\mathbf{a}_b}_{\mu} \mathbf{e}_y = \underbrace{\begin{pmatrix} a_x \\ a_b \end{pmatrix}}_{\text{Spaltenvektor}}$$

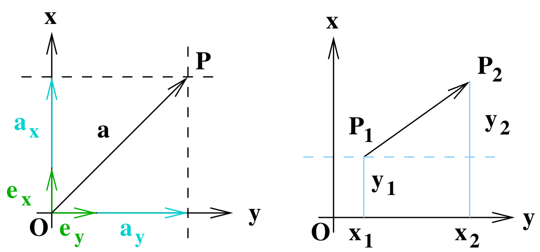


Abbildung 25: Komponentendarstellung von Vektoren

$\mathbf{e}_x,\ \mathbf{e}_y$ Einheitsvektor
$\mathbf{e}_x \perp \mathbf{e}_y$
$\mathbf{a} = \mathbf{OP}$
$a_x,\ a_y =$ Vektorkoordinaten (Skalar)

$$\mathbf{a} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = (x_2 - x_1)\mathbf{e}_x + (y_2 - y_1)\mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

Betrag

$$|\mathbf{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Gleichheit

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; a_x = b_x;\; a_y = b_y$$

14.2.1 Darstellung der Vektoroperationen

$$\lambda\mathbf{a} = \lambda\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{a}| \cdot \cos\varphi = ab \cdot \cos\varphi \quad (0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ)$$
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a};\; \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$
$$\lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b})$$

Orthogonale Vektoren

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b}: \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \;\Leftarrow\; \cos\left(\frac{pi}{2}\right) = 0$$
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y$$

$$\angle: \quad \varphi = \arccos\left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}\right) \qquad \begin{array}{lll} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0 & \Rightarrow & \varphi < 90^\circ \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 & \Rightarrow & \varphi = 90^\circ \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0 & \Rightarrow & \varphi > 90^\circ \end{array}$$

14.3 Vektorrechnung im 3D-Raum

Komponentendarstellung

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z = a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{a} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

Betrag

$$\mathbf{a} = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Gleichheit

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; a_x = b_x,\; a_y = b_y,\; a_z = b_z$$

14.3.1 Darstellung der Vektoroperationen

$$\lambda\mathbf{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \\ \lambda a_z \end{pmatrix}$$

Normierung

$$\mathbf{e}_a = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \cdot \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Richtungs-$\angle$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\mathbf{a}|},\; \cos\beta = \frac{a_b}{|\mathbf{a}|},\; \cos\gamma = \frac{a_z}{|\mathbf{a}|}$$

$$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$$

Vektorprodukt

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \text{ Flächeninhalt des Parallelogramms}$$

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (\mathbf{c} \perp \mathbf{a},\; \mathbf{c} \perp \mathbf{b})$$

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\varphi \quad (0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ)$$

$$\mathbf{a},\, \mathbf{b},\, \mathbf{c} = \text{rechtshändiges System}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$$

$$\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} \text{ und } \mathbf{b} \text{ sind kollinear}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$